8 Korrespondenzen

Seien X und Y nichtleere Mengen.
Eine *Korrespondenz* von X nach Y ist eine Abbildung: $\Phi : X \to 2^Y = \mathcal{P}(Y)$. Wir bezeichnen

$$Gr\,\Phi := \{(x,y) : y \in \Phi(x), x \in X\}$$

als den *Graph* von Φ.

Ferner sei für $B \subset Y$

$$\Phi^+(B) := \{x \in X : \Phi(x) \subset B\}$$
$$\Phi^-(B) := \{x \in X : \Phi(x) \cap B \neq \emptyset\}$$

Die Abbildungen Φ^+ bzw. Φ^- heissen *obere bzw. untere Inverse von* Φ.

Im Folgenden seien X und Y topologische Räume. Wir betrachten Korrespondenzen Φ von X nach Y mit gewissen Stetigkeitseigenschaften.

8.1. Definition. Die Korrespondenz $\Phi : X \to 2^Y$ heißt

a) *nach oben halbstetig (ohs)* an der Stelle $\bar{x}$, wenn zu jeder Umgebung G von $\Phi(\bar{x})$ eine Umgebung U von $\bar{x}$ existiert mit $\Phi(x) \subset G$ für alle $x \in U$.

b) *nach unten halbstetig (uhs)* an der Stelle $\bar{x}$,
wenn es zu jeder offenen Menge $G \subset Y$ mit $\Phi(\bar{x}) \cap G \neq \emptyset$ eine Umgebung U von $\bar{x}$ gibt, so dass $\Phi(x) \cap G \neq \emptyset$ für alle $x \in U$.

Φ heißt *ohs (uhs)*, wenn es überall ohs (uhs) ist. Φ heißt *stetig*, wenn es ohs und uhs ist.

Interpretation: Φ ist ohs (uhs) in $\bar{x}$, wenn $\Phi(x)$ nicht „explodiert" (bzw. „implodiert") bei $x = \bar{x}$.

Beispiel: Definiere $\Phi(x) := \begin{cases} [-2,2] & \text{für } x < 0 \\ [-1,1] & \text{für } 0 \leqq x \leqq 2 \\ \{0\} & \text{für } x > 0 \end{cases}$

Dann ist Φ uhs aber nicht ohs an $x = 0$, und ohs aber nicht uhs an der Stelle $x = 2$.

Wer mag, kann hier eine Skizze einzeichnen.

8.2. Lemma. *Sei Φ eine Korrespondenz von X nach Y.*

a) Es sind äquivalent:

i) Φ ist ohs.
ii) Für jedes offene $G \subset Y$ ist $\Phi^+(G)$ offen.
iii) Für jedes abgeschlossene $F \subset Y$ ist $\Phi^-(F)$ abgeschlossen.

b) Es sind äquivalent:

i) Φ ist uhs.
ii) Für jedes offene $G \subset Y$ ist $\Phi^-(G)$ offen.
iii) Für jedes abgeschlossene $F \subset Y$ ist $\Phi^+(F)$ abgeschlossen.

Beweis. a) $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ folgt aus $(\Phi^+(G))^C = \Phi^-(G^C)$.

$(i) \Leftrightarrow (ii)$: Das folgt unmittelbar aus den entsprechenden Definitionen.

b) analog. □

Bemerkung: Jede Abbildung $\varphi : X \to Y$ definiert durch $\Phi_\varphi(x) := \{\varphi(x)\}$ eine Korrespondenz. Dann gilt

$$\Phi_\varphi \text{ ohs} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_\varphi \text{ uhs} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \text{ stetig}$$

denn $\Phi^+_\Phi(G) = \Phi^-_\varphi(G) = \varphi^{-1}(G)$.

Zur Erinnerung: Ein topologischer Raum heißt *regulär (oder T3)*, wenn es zu jedem $x \in X$ und jeder abgeschlossenen Menge $F \subset X$ mit $x \notin F$ offene Mengen U und G gibt mit

$$x \in U, \quad F \subset G, \quad U \cap G = \emptyset$$

Insbesondere ist jeder metrische Raum sowie jeder kompakte Hausdorffraum regulär (genau genommen sind diese beiden Klassen von Räumen sogar *normal (oder T4)*, d.h. sie haben die stärkere Trennungseigenschaft, dass man zwei abgeschlossene Mengen durch offene trennen kann)[9].

8.3. Lemma. *Seien X ein beliebiger und Y ein regulärer topologischer Raum, sowie Φ eine Korrespondenz von X nach Y. Ist Φ ohs und sind alle $\Phi(x)$, $x \in X$ abgeschlossen, so ist $Gr\,\Phi$ abgeschlossen (in der Produkttopologie).*

Beweis. Wir zeigen, dass $(Gr\,\Phi)^C$ offen ist. Sei $(\bar{x},\bar{y}) \in (X \times Y) \setminus Gr\,\Phi$; d.h. $\bar{y} \notin \Phi(\bar{x})$. Da $\Phi(\bar{x})$ abgeschlossen und Y regulär ist, gibt es disjunkte offene Umgebungen U von $\bar{y}$ und G von $\Phi(\bar{x})$. Da Φ ohs ist, gibt es eine offene Umgebung V von $\bar{x}$ mit $\Phi(V) \subset G$. Nun gilt für alle $v \in V$: $\Phi(v) \cap U = \emptyset$. Also $(\bar{x},\bar{y}) \in V \times U \subset (Gr\,\Phi)^C$. □

Die Umkehrung dieses Lemmas gilt im allgemeinen nicht:

8.4. Beispiel. $X = Y = \mathbb{R}_+$ mit $\Phi(x) = \{\varphi(x)\}$ sowie $\varphi(x) = 1/x$ für positive x, und $\varphi(0) = 0$. Hier ist $Gr\,\Phi$ abgeschlossen, alle $\Phi(x)$ sind abgeschlossen, aber Φ ist nicht ohs, da φ bei 0 unstetig ist. ◊

[9]Der Vollständigkeit halber: T2 ist Hausdorff;
T1: Man kann zu zwei Punkten um jeden der beiden eine offene Menge finden, die den anderen nicht enthält, und
T0: Von zwei Punkten hat einer eine Umgebung die den anderen nicht enthält.

8.5. Lemma. *Seien X und Y topologische Räume und Φ_i seien zwei Korrespondenzen von X nach Y (für $i = 1, 2$). Sei $\Phi(x) := \Phi_1(x) \cap \Phi_2(x)$.*
Ist $Gr\,\Phi_1$ abgeschlossen, Φ_2 ohs und $\Phi_2(x)$ abgeschlossen und kompakt (für alle x), so ist Φ ohs.

Beweis. Sei $\bar{x} \in X$ und G eine Umgebung von $\Phi(\bar{x})$.
Fall 1: $\Phi_2(\bar{x}) \subset G$. Da Φ_2 ohs ist, gibt es eine Umgebung U von $\bar{x}$, so dass $\Phi_2(U) \subset G$ gilt. Insbesondere folgt $\Phi(x) \subset \Phi_2(x) \subset G$ für alle $x \in U$. Somit ist Φ ohs in $\bar{x}$.
Fall 2: Es gibt ein $y \in \Phi_2(\bar{x})\backslash G$.
Dann ist $y \notin \Phi_1(\bar{x})$, und $(\bar{x}, y) \in (Gr\,\Phi_1)^C$ (offen). Also gibt es für alle $y \in \Phi_2(\bar{x})\backslash G$ eine offene Umgebung U_y von $\bar{x}$ und V_y von y mit $U_y \times V_y \subset (Gr\,\Phi_1)^C$.
Für alle $x \in U_y$ gilt $\Phi_1(x) \cap V_y = \emptyset$ $(*)$. Des weiteren ist

$$\underbrace{\Phi_2(\bar{x})\backslash G}_{\text{kompakt}} \subset \bigcup \underbrace{\{V_y : y \in \Phi_2(\bar{x})\backslash G\}}_{\text{offene Überdeckung}}$$

Also gibt es endlich viele $y^1, \ldots, y^n$, so dass $V := V_{y^1} \cup \cdots \cup V_{y^n} \supset \Phi_2(\bar{x})\backslash G$, also $\Phi_2(\bar{x}) \subset G \cup V$.
Da Φ_2 ohs ist, gibt es eine offene Umgebung W von $\bar{x}$ mit $\Phi_2(W) \subset G \cup V$.
Setze $U := U_{y^1} \cap \cdots \cap U_{y^n}$. Dann ist U eine offene Umgebung von $\bar{x}$ und $(*)$ impliziert

$$\Phi_1(x) \cap V = \emptyset \qquad \forall x \in U$$

Für $x \in U \cap W$ gilt: $\Phi_1(x) \cap V = \emptyset$ und $\Phi_2(x) \subset G \cup V$.
Also gilt für diese x-Werte: $\Phi(x) \subset G$ und Φ ist ohs in $\bar{x}$. □

8.6. Satz („Umkehrung von 8.3“ ⊛). *Seien X und Y topologische Räume, sowie Φ eine Korrespondenz von X nach Y mit abgeschlossenem Graphen. Dann ist jedes $\Phi(x)$ abgeschlossen. Ist Y kompakt, so ist Φ ohs.*

Beweis. 1. Sei $\bar{x} \in X$. Zu jedem $\bar{y} \notin \Phi(\bar{x})$, d.h. $(\bar{x}, \bar{y}) \notin Gr\,\Phi$ gibt es eine offene Umgebung $U \times V$ von $(\bar{x}, \bar{y})$ mit $U \times V \subset (Gr\,\Phi)^C$ (da $Gr\,\Phi$ abgeschlossen ist). Insbesondere gilt $y \notin \Phi(\bar{x})$ für alle $y \in V$. Somit ist $\Phi(\bar{x})^C$ offen, was zu zeigen war.

2. Setze $\Phi_1 := \Phi$ (hat abgeschlossenen Graphen) und $\Phi_2(x) := Y$ für alle $x \in X$. Dann ist Φ_2 ohs, $\Phi_2(x)$ ist abgeschlossen und kompakt für alle x. Nach Lemma 8.5 ist $\Phi = \Phi_1 \cap \Phi_2$ ohs. □

8.7. Lemma (⊛). *Seien X, Y topologische Räume und $A \subset X, B \subset Y$ kompakte Teilmengen.*
$G \subset X \times Y$ sei eine offene Teilmenge in der Produkttopologie.
Gilt $A \times B \subset G$, so gibt es offene Mengen $U \subset X, V \subset Y$ mit $A \times B \subset U \times V \subset G$.

Beweis. Die Menge der „offenen Rechtecke“ $\mathcal{R} := \{U \times V : U \subset X \text{ offen}, V \subset Y \text{ offen}\}$ bildet eine Basis für die Produkttopologie.
1. Schritt: Die Aussage gilt für $A = \{a_0\}$.
Für jeden Punkt $(a_0, b) \in \{a_0\} \times B$ gibt es offene Umgebungen U_b von a_0 und V_b von b mit $U_b \times V_b \subset G$. Da B kompakt ist, reichen endlich viele dieser Mengen aus, um $\{a_0\} \times B$ zu überdecken, d.h.

$$\{a_0\} \times B \subset \bigcup_{i=1}^{n} (U_{b^i} \times V_{b^i}) \subset G$$

und

$$\{a_0\} \times B \subset \underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_{b^i}\right)}_{=:U} \times \underbrace{\left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{b^i}\right)}_{=:V} \subset \bigcup_{i=1}^{n} (U_{b^i} \times V_{b^i}) \subset G$$

2. Schritt: Die Aussage gilt für allgemeines A.
Für jedes $a \in A$ finden wir nach Schritt 1 eine offene Umgebung U_a von a und eine offene Umgebung V_a von B mit $\{a\} \times B \subset U_a \times V_a \subset G$. Da A kompakt ist, reichen endliche viele der Mengen U_a aus, um A zu überdecken. Dann gilt:

$$A \times B \subset \bigcup_{j=1}^{m} \left(U_{a^j} \times \underbrace{V_{a^j}}_{\supset B} \right) \subset G$$

$$A \times B \subset \underbrace{\left(\bigcup_{i=1}^{m} U_{b^i}\right)}_{=:U} \times \underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^{m} V_{b^i}\right)}_{=:V} \subset \bigcup_{j=1}^{m} (U_{a^j} \times V_{a^j}) \subset G$$

Somit leistet $U \times V$ das Gewünschte. □

8.8. Lemma. *Für $i \in \{1, \ldots, h\}$ seien X und Y^i topologische Räume und Φ^i seien ohs Korrespondenzen von X nach Y^i.*

Für jedes x und i sei $\Phi^i(x)$ nichtleer und kompakt.

Dann ist die „Produktkorrespondenz“ $\Phi = \Phi^1 \times \cdots \times \Phi^h$ ohs.

Beweis. Es ist klar, dass wir oBdA $h = 2$ annehmen können (Induktionsargument).

Sei $x \in X$ und G eine offene Umgebung von $\Phi^1(x) \times \Phi^2(x)$. Nach 8.7 gibt es offene Mengen $G_i \supset \Phi^i(x)$ $(i \in \{1, 2\})$ mit $G_1 \times G_2 \subset G$. Da Φ^i ohs ist gibt es offene Umgebungen U_i von x mit $\Phi^i(U_i) \subset G_i$. Also ist

$$\Phi^1(x) \times \Phi^2(x) \subset G_1 \times G_2 \subset G \qquad \text{für alle } x \in U_1 \cap U_2$$

□

8.9. Satz. *Seien X und Y topologische Räume, $f : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ uhs und Φ eine uhs Korrespondenz von X nach Y mit $\Phi(x) \neq \emptyset$ für alle x.*

Dann ist $\alpha(x) := \sup_{y \in \Phi(x)} f(x, y)$ uhs.

Beweis. Wir haben zu zeigen, dass für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ die Menge

$$T = T_\gamma := \{x \in X : \alpha(x) > \gamma\}$$

offen ist. Sei $x_0 \in T$. Wegen $\alpha(x_0) > \gamma$ existiert ein $y_0 \in \Phi(x_0)$ mit $f(x_0, y_0) > \gamma$. Da f uhs ist, existieren Umgebungen U von x_0 und V von y_0 mit $f(x, y) > \gamma$ für alle $(x, y) \in U \times V$ $(*)$.

Wegen $y_0 \in \Phi(x_0) \cap V$ folgt aus der Unterhalbstetigkeit von Φ die Existenz einer Umgebung W von x_0 mit $\Phi(x) \cap V \neq \emptyset$ für $x \in W$.

Für $x \in U \cap W$ existiert ein $y \in \Phi(x) \cap V$; nach $(*)$ gilt: $\alpha(x) \geqq f(x, y) > \gamma$. Insbesondere ist die Umgebung $U \cap W$ von x_0 eine Teilmenge von T_γ. □

8.10. Satz. *Seien X und Y topologische Räume, $f : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ ohs und Φ eine ohs Korrespondenz von X nach Y mit $\Phi(x)$ kompakt und nicht leer für alle x.*

Dann ist $\alpha(x) := \sup_{y\in\Phi(x)} f(x,y)$ ohs.

Beweis. Wir haben zu zeigen, dass für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ die Menge

$$S = S_\gamma := \{x \in X : \alpha(x) < \gamma\}$$

offen ist. Sei $x_0 \in S$. Wähle $\delta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha(x_0) < \delta < \gamma$. Für $y \in \Phi(x_0)$ gilt $f(x_0, y) < \delta$. Da f ohs ist, existieren offene Umgebungen U_y von x_0 und V_y von y, so dass $f(x, z) < \delta$ für alle $(x, z) \in U_y \times V_y$ gilt.

Da $\Phi(x_0)$ kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $V_{y^1}, \ldots, V_{y^n}$; d.h.

$$\Phi(x_0) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y^i} =: V$$

Da Φ ohs ist, existiert eine Umgebung U von x_0 mit $\Phi(x) \subset V$ für alle $x \in U$.

Betrachte die Umgebung $W := U \cap \bigcap_{i=1}^n U_{y^i}$ von x_0. Für $x \in W$ gilt:

$$\begin{aligned} y \in \Phi(x) \quad &\Rightarrow \quad y \in V \\ &\Rightarrow \quad y \in V_{y^i} \text{ für ein } i \\ &\Rightarrow \quad (x,y) \in U_{y^i} \times V_{y^i} \text{ für dieses } i \\ &\Rightarrow \quad f(x,y) < \delta \end{aligned}$$

Somit gilt $\alpha(x) \leqq \delta < \gamma$, also $W \subset S$. □

8.11 Maximumsatz von Berge

8.11. Satz. *Seien X, Y topologische Räume, und $f : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ stetig. Ferner sei Φ eine stetige Korrespondenz von X nach Y mit $\Phi(x)$ abgeschlossen, kompakt und nicht leer für alle x. Sei*

$$\begin{aligned} \alpha(x) &:= \sup_{y\in\Phi(x)} f(x,y) \\ \mathcal{M}(x) &:= \{y \in \Phi(x) : f(x,y) = \alpha(x)\} \end{aligned}$$

Dann ist α stetig und $\mathcal{M}$ ist eine ohs Korrespondenz von X nach Y.

Beweis. Die Stetigkeit von α folgt aus den beiden vorangegangenen Sätzen.

Wenn wir

$$\Psi(x) := \{y \in Y : f(x,y) - \alpha(x) \geqq 0\}$$

definieren, so ist $\mathcal{M} = \Psi \cap \Phi$. Der Graph

$$Gr\,\Psi = \{(x,y) : f(x,y) - \alpha(x) \geqq 0\}$$

ist abgeschlossen, da f und α stetig sind. Nun folgt die Behauptung aus 8.5. □

8.12. Satz. *Sei X eine kompakte konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den Eigenschaften*

a) $f(x, \cdot)$ ist uhs für alle x.

b) $f(\cdot, y)$ ist konkav für alle y.

Ferner sei Φ eine Korrespondenz von X nach X derart, dass gilt:

c) $\Phi(x)$ ist nicht leer, abgeschlossen und konvex für alle x.

d) $\alpha(y) := \sup_{x\in\Phi(y)} f(x,y)$ ist uhs (mit $y \in X$).

e) $\beta_r(y) := \sup_{x\in\Phi(y)} r^t x$ ist ohs für alle $r \in \mathbb{R}^n$ (mit $y \in X$).

Dann existiert ein $y \in X$ mit

i) $y \in \Phi(y)$; Ein solches y heißt **Fixpunkt** *von Φ.*

ii) $\alpha(y) = \sup_{x\in\Phi(y)} f(x,y) \leqq \sup_{z\in X} f(z,z)$.

Beweis. Setze $\mu := \sup_{z\in X} f(z,z)$.

1. Fall: $\mu = 0$. Nehmen wir an, die Behauptung sei falsch:
Dann gilt für alle y entweder $y \notin \Phi(y)$ (α) oder $\alpha(y) > 0$ (β).

Im Falle (α) gibt es nach dem Trennungssatzes 4.7 ein $r \in \mathbb{R}^n$ mit

$$r^t y > \max_{x\in\Phi(y)} r^t x = \sup_{x\in\Phi(y)} r^t x = \beta_r(y)$$

und wir haben

$$X = \underbrace{\{y \in X : \alpha(y) > 0\}}_{\text{offen, da } \alpha \text{ uhs}} \cup \bigcup_{r\in\mathbb{R}^n} \underbrace{\{y \in X : \beta_r(y) - r^t y < 0\}}_{\text{offen, da } \beta_r \text{ ohs}}$$

Da X kompakt ist, gibt es $r^1, \ldots, r^n \in \mathbb{R}^n$, so dass $X = \bigcup_{i=0}^n U_i \quad (*)$, mit

$$\begin{aligned} U_0 &:= \{\alpha > 0\} \\ U_i &:= \{y \in X : \beta_{r^i}(y) < (r^i)^t y\} \qquad 1 \leqq i \leqq n \end{aligned}$$

Setze für $x, y \in X$

$$\varphi(x,y) := d(y, U_0^C) f(x,y) + \sum_{i=1}^n d(y, U_i^C)(r^i)^t (y - x)$$

Hier ist $d(y, F) = \inf_{z\in F} d(y,z)$. Wegen $|d(x,F) - d(y,F)| \leqq d(x,y)$ ist $d(\cdot, F)$ stetig.

Wir haben $\mu = 0$, d.h. $f(x,x) \leqq 0$ für alle x, woraus wir $\varphi(x,x) \leqq 0$ schließen. Da $f(x,\cdot)$ uhs ist, erhalten wir aus 5.3 (Abgeschlossenheit der uhs-Funktionen unter Addition), dass $\varphi(x,\cdot)$ uhs ist.

Ebenso schließen wir aus $f(\cdot, y)$ konkav (mit 5.5), dass $\varphi(\cdot, y)$ konkav ist (beachte hierbei: die rechte Summe ist linear in x, also konkav), und somit quasikonkav ist.

Nun folgt mit dem Ky Fanschen Minimaxprinzip (7.4), dass ein $\bar{y} \in X$ existiert, so dass für alle $x \in X$

$$\varphi(x, \bar{y}) \leqq \sup_{z \in X} \varphi(z, z) \leqq 0$$

gilt. Wir wollen hierzu einen Widerspruch konstruieren. Sei $\bar{x} \in \Phi(\bar{y})$ beliebig, falls $\alpha(\bar{y}) \leqq 0$ ist, und $\bar{x} \in \Phi(\bar{y})$ mit $f(\bar{x}, \bar{y}) > 0$, falls $\alpha(\bar{y}) > 0$ ist.
Dann gilt

$$\begin{aligned}
d(\bar{y}, U_0^C) > 0 &\Leftrightarrow \bar{y} \notin U_0^C \\
&\Leftrightarrow \bar{y} \in U_0 \\
&\Leftrightarrow \alpha(\bar{y}) > 0 \\
&\Rightarrow d(\bar{y}, U_0^C) f(\bar{x}, \bar{y}) > 0 \\
d(\bar{y}, U_i^C) > 0 &\Leftrightarrow \bar{y} \in U_i \\
&\Rightarrow (r^i)^t \bar{y} > \beta_{r^i}(\bar{y}) = \sup_{x \in \Phi(\bar{y})} (r^i)^t x \geqq (r^i)^t \bar{x} \qquad 1 \leqq i \leqq n
\end{aligned}$$

Somit ist nach $(*)$ einer der Summanden in $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ positiv, (die nicht-positiven sind Null), also $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) > 0$.
2. Fall: $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wende den 1. Fall auf $\bar{f}(x, y) := f(x, y) - \mu$.
3. Fall: $\mu = \infty$. Wähle ein y mit $y \in \Phi(y)$. Ein solches existiert nach dem 1. Fall mit $f \equiv 0$. □

8.13 Fixpunktsatz von Kakutani

8.13. Korollar. *Sei X eine kompakte konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^k$, und Φ eine Korrespondenz von X nach X derart, dass gilt:*

a) $\Phi(x)$ ist nicht leer, abgeschlossen und konvex für alle x.

b) $\beta_r(y) := \sup_{x \in \Phi(y)} r^t x$ ist ohs für alle $r \in \mathbb{R}^k$ (mit $y \in X$).

Dann hat Φ einen Fixpunkt.

Beweis. Setze $f \equiv 0$ im vorigen Satz. □

8.14. Bemerkung. Das obige Korollar bleibt richtig, wenn man die Bedingung (b) ersetzt durch:
$b')$ $Gr\, \Phi$ ist abgeschlossen.
oder durch
$b'')$ Φ ist ohs.

Beweis. $(b'') \Rightarrow (b)$ folgt aus 8.10.
$(b') \Leftrightarrow (b'')$ folgt aus 8.6 und 8.3 (man beachte, dass wir hierbei (a) voraussetzen). □

8.15 Fixpunktsatz von Brouwer

8.15. Satz. *Sei X eine konvexe, kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^k$ und $\varphi : X \to X$ stetig. Dann hat φ einen Fixpunkt.*

Beweis. Man wende den Fixpunktsatz von Kakutani auf $\Phi(x) := \{\varphi(x)\}$ an. ($\beta_r(y) = r^t \varphi(y)$ ist stetig.) □

8.16. Definition. Eine *abstrakte Ökonomie* ist ein Tupel $\mathcal{A} = (S^l, \Psi^l, v^l)_{l=1}^h$.
Hierbei sind die S^l nichtleere Mengen (Strategiemenge des Akteurs l), Ψ^l ist eine Korrespondenz von $S := \prod_{l=1}^h S^l$ nach S^l (in der Situation s ist $\Psi^l(s)$ die Menge der erlaubten Strategien des Akteurs l), und $v^l : Gr(\Psi^l) \to \mathbb{R}$ ist die Nutzenfunktion („utility") des Akteurs l.
Ein h-Tupel $s^* = (s^{1*}, \ldots, s^{h*}) \in S$ heißt *soziales Gleichgewicht*, wenn für alle l gilt:

(SG1) $s^{l*} \in \Psi^l(s^*)$ („s^* ist zulässig.")

(SG2) $v^l(s^*, s^{l*}) \geqq v^l(s^*, s^l)$ für alle $s^l \in \Psi^l(s^*)$. („Es gibt keine bessere zulässige Strategie.")

Bemerkung: Meist ist die Menge aller zulässigen Aktionentupel $Z \subset S$ vorgegeben und es ist:

$$\Psi^l(s) = \{z^l \in S^l : (s^1, \ldots, s^{l-1}, z^l, s^{l+1}, \ldots, s^h) \in Z\}$$

Das heißt: z^l muss zu den anderen Aktionen s^i „passen".
Der Begriff der abstrakten Ökonomie ist in dieser Allgemeinheit nur schwer „praktisch" interpretierbar. Er ist aber als mathematisches Werkzeug zum Beweis von Existenzsätzen nützlich.

8.17 Satz von Arrow-Debreu-Nash

8.17. Satz. *Sei $\mathcal{A} = (S^l, \Psi^l, v^l)_{l=1}^h$ eine abstrakte Ökonomie. Für jedes l gelte:*

i) S^l ist eine nichtleere kompakte konvexe Teilmenge eines euklidischen Raumes.

ii) Ψ^l ist stetig und jedes $\Psi^l(s)$ ist nichtleer, abgeschlossen und konvex für jedes $s \in S$.

iii) v^l ist stetig und jedes $v^l(s, \cdot)$ ist quasikonkav für jedes $s \in S$.

Dann besitzt $\mathcal{A}$ ein soziales Gleichgewicht.

Beweis. Sei $\alpha^l(s) := \sup_{z \in \Psi^l(s)} v^l(s, z)$ und $\Phi^l(s) := \{t^l \in \Psi^l(s) : v^l(s, t^l) = \alpha^l(s)\}$.
Nach dem Maximumsatz von Berge (8.11) ist α^l stetig und $\Phi^l(s)$ eine ohs Korrespondenz von S nach S^l. Da v^l stetig und $\emptyset \neq \Psi^l(s)$ kompakt ist, ist $\Phi^l(s)$ nicht leer und abgeschlossen (also als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge auch kompakt).
Wir wollen noch zeigen, dass $\Phi^l(s)$ auch konvex ist. Seien $y^l, z^l \in \Phi^l(s)$, $\lambda \in (0,1)$, und $u_\lambda := (1-\lambda) y^l + \lambda z^l$.
Da $\Psi^l(s)$ konvex ist gilt $u_\lambda \in \Psi^l(s)$, und da $v^l(s, \cdot)$ quasikonkav ist erhalten wir aus

$$v^l(s, y^l) \overset{(\geq)}{=} \alpha^l(s)$$
$$v^l(s, z^l) \overset{(\geq)}{=} \alpha^l(s)$$

die Ungleichung $v^l(s, u_\lambda) \geqq \alpha^l(s)$, was zu zeigen war (das $\geqq$ ist offenbar ein $=$).
Betrachte die „Produktkorrespondenz" Φ von S nach S, d.h. $\Phi(s) = (\Phi^1(s), \ldots, \Phi^h(s))$. Hier ist S kompakt, konvex und alle $\Phi(s)$ sind nicht leer, abgeschlossen und konvex. Mit den Φ^l ist auch Φ ohs (nach 8.8). Mit 8.13 und 8.14 folgt die Existenz eines $\bar{s}$ mit $\bar{s} \in \Phi(\bar{s})$. Nun gilt

$$\bar{s}^l \in \Phi^l(\bar{s})$$

woraus mit den Definitionen unmittelbar ersichtlich ist, dass $\bar{s}$ ein soziales Gleichgewicht ist. □

Literatur zu Kapitel 8: [**AH**], [**Au**], [**De**], [**Hi**], [**HK**], [**Ich**], [**KN**], [**Ni 1**]