5 Nutzenfunktionen

5.1 Reelle Funktionen

5.1 Definition. Sei X ein topologischer Raum. Eine erweitert reellwertige Funktion

$$f : X \to \bar{\mathbb{R}} \; (= [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$$

heißt *nach oben (unten) halbstetig* (kurz: *ohs, uhs*), wenn

$$\{f \geqq \alpha\} := \{x \in X : f(x) \geqq \alpha\}$$

(bzw. $\{f \leqq \alpha\}$) für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ abgeschlossen ist.

Anmerkung: f ist stetig genau dann wenn f nach oben und unten halbstetig ist und „f nach oben halbstetig“ ist äquivalent zu „$-f$ nach unten halbstetig“.

Erinnerung: Ein topologischer Raum X heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilmenge hat, die X auch überdeckt; dies ist äquivalent zu der folgenden Aussage:

Seien F_i, für $i \in I$, abgeschlossene Teilmengen von X, so gilt:

$$\forall J \subset I \text{ endlich}, \bigcap_{j \in J} F_j \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$$

5.2 Lemma. *Sei X ein kompakter topologischer Raum. Dann gilt:*

a) Jede nach oben halbstetige Funktion nimmt ein Maximum an.

b) Jede nach unten halbstetige Funktion nimmt ein Minimum an.

Beweis. Übung. □

5.3 Lemma. *Sei X ein topologischer Raum. Für erweitert reellwertige Funktionen auf X gilt:*

a) Die ohs sowie uhs Funktionen sind abgeschlossen unter Multiplikation mit positiven Skalaren.

b) Die ohs sowie uhs Funktionen sind abgeschlossen unter Addition (sofern die Summe definiert ist).

c) Die nichtnegativen uhs Funktionen sind abgeschlossen unter Produktbildung.

d) Ist $f_i, i \in I$ eine Familie von ohs Funktionen, so ist $g := \inf_i f_i$ (punktweise) ebenfalls ohs. Ist I endlich, so ist auch $h := \max_i f_i$ ohs.

Beweis. einfache Übung. □

5.4 Definition. Sei X eine konvexe Teilmenge eines Vektorraums. Eine Funktion $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt

a) *quasikonkav (quasikonvex)*, falls alle $\{f \geqq \alpha\}$ (bzw. $\{f \leqq \alpha\}$), für $\alpha \in \mathbb{R}$ konvex sind.

b) *(streng) konkav*, falls für alle $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ und $\lambda \in (0,1)$ gilt:

$$\infty > f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \overset{(>)}{\geqq} \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

c) *(streng) konvex*, wenn $-f$ (streng) konkav ist.

Ein Beispiel für eine quasikonkave Funktion, die nicht konkav ist, erhält man mit $f|_{(-\infty,0]} \equiv 0$ und $f|_{(0,\infty)} \equiv 1$.
Skizzen...

5.5 Lemma. *Sei X eine konvexe Menge. Für erweitert reellwertige Funktionen auf X gilt:*

a) Die (quasi-) konkaven sowie (quasi-)konvexen Funktionen sind abgeschlossen unter Multiplikation mit positiven Skalaren.

b) Die konkaven sowie konvexen Funktionen sind abgeschlossen unter Addition.
(Achtung: Gilt nicht für quasi-konkave Funktionen!)

c) Die (quasi-)konkaven Funktionen sind abgeschlossen unter (beliebiger) Infimum-Bildung.

d) Die (quasi-)konvexen Funktionen sind abgeschlossen unter (beliebiger) Supremums-Bildung.

e) Konkavität (Konvexität) impliziert Quasikonkavität (Quasikonvexität).

Beweis. Übung. □

5.6 Nutzenfunktionen

5.6 Definition. Sei $\succeq$ eine binäre Relation auf X. Eine Funktion $u : X \to \mathbb{R}$ heißt *Nutzenfunktion (utility function)* für $\succeq$, falls für alle $x, y \in X$ gilt:

$$x \succeq y \quad \Leftrightarrow \quad u(x) \geqq u(y)$$

5.7 Bemerkung. Ist u eine Nutzenfunktion für $\succeq$, so auch $v := g \circ u$ für jede streng monoton wachsende Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (z.B. die arctan-Funktion oder in geeigneten Fällen die **log-Funktion**).

5.8 Definition. Sei u eine erweitert reellwertige Funktion auf einer nichtleeren Menge X. Dann wird durch:

$$x \succeq^u y \quad :\Leftrightarrow \quad u(x) \geqq u(y)$$

eine Präferenzordnung auf X definiert, die wir *von u erzeugte Präferenzordnung* nennen.

5.9 Bemerkung. Für eine erweitert reellwertige Funktion $u : X \to \bar{\mathbb{R}}$ gilt:

a) Die von u erzeugte Präferenzordnung auf (dem topologischen Raum) X ist ohs (uhs, stetig), wenn u diese Eigenschaft hat.

b) Ist X konvexe Teilmenge eines Vektorraums, so gilt:

   i) u quasikonkav $\Leftrightarrow$ $\succeq^u$ schwach konvex.
   ii) u streng konkav $\Rightarrow$ $\succeq^u$ streng konvex.
   iii) u konkav $\Rightarrow$ $\succeq^u$ ist konvex und schwach konvex.

Beweis. Übung. □

5.10 Bemerkung. Die Umkehrungen des letzten Lemmas sind im allgemeinen falsch. Beispiel:

$$u(x) := \begin{cases} x & x < 0 \\ x+1 & x \geqq 0 \end{cases}$$

5.11 Beispiel. a) $X = \mathbb{R}^2_+$ (zwei-Güter-Ökonomie), vgl. Beispiel 4.6.

Für jedes $\alpha \in (0,1)$ wird durch $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ eine *Cobb-Douglas-Nutzenfunktion* definiert. Setzt man

$$v(x_1, x_2) = \log u(x_1, x_2) = \alpha \log x_1 + (1-\alpha) \log x_2$$

so ist $\succeq^u = \succeq^v$ nach 5.7. Da u stetig ist, ist $\succeq^u$ abgeschlossen (d.h. stetig).

b) $X = \mathbb{R}^2_+$. Für $\alpha > 0, \beta > 0$ ist durch $u(x_1, x_2) = \min\{\alpha x_1, \beta x_2\}$ eine *Leontieff-Nutzenfunktion* definiert.

ganzzahliger Spezialfall: Güter: rechte bzw. linke Handschuhe. Die Nutzenfunktion bestimmt die Zahl der Handschuhpaare.

c) $X = \mathbb{R}^n_+$ $(n \neq 1)$ mit der lexikographischen Ordnung. Diese hat *keine* Nutzenfunktion.

Annahme: $\succeq = \succeq^u$. Setze

$$A_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : x_1 = \alpha\} \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R}$$

Wähle $x^\alpha, y^\alpha \in A_\alpha$ mit $x_2^\alpha > y_2^\alpha$, also $x^\alpha \succ y^\alpha$. Dann gilt:

$$u(x^\alpha) > u(y^\alpha)$$

Wähle $q(\alpha) \in \mathbb{Q}$ mit $u(x) > q(\alpha) > u(y)$. Damit erhalten wir eine streng monotone Funktion $q : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$. Insbesondere ist q injektiv, was die Abzählbarkeit von $\mathbb{R}$ zur Folge hätte. ♢

Problem: Wann existiert zu $\succeq$ eine Nutzenfunktion?

5.12 Satz. *Sei $\succeq$ eine Präferenzordnung auf X.*
Wenn es eine abzählbare Teilmenge $T \subset X$ gibt, so dass aus $x_2 \succ x_1$ die Existenz eines $t \in T$ mit $x_2 \succ t \succ x_1$ folgt, dann existiert eine Nutzenfunktion u mit $\succeq^u = \succeq$.

Beweis. Übung. □

Sei $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}$.
Ein maximales nicht entartetes Intervall $I \subset S^C$ mit unterer und oberer Schranke in S heißt *Lücke*.

Problem: Wann existiert eine stetige Nutzenfunktion zu $\succeq$?
Nach 5.9 muss $\succeq$ abgeschlossen sein.

5.13 Lemma. *Sei $\succeq$ eine abgeschlossene Präferenzordnung und u eine Nutzenfunktion zu $\succeq$. Sind alle Lücken von $u(X)$ offen, so ist u stetig.*

Beweis. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Es ist zu zeigen:

$$\{u \geqq \alpha\} \text{ ist abgeschlossen} \tag{5.1}$$
$$\{u \leqq \alpha\} \text{ ist abgeschlossen} \tag{5.2}$$

(5.1): *Fall 1:* $\alpha \in u(X)$, d.h. $\exists y \in X$ mit $u(y) = \alpha$. Es gilt:

$$\{u \geqq \alpha\} = \{x \in X : u(x) \geqq u(y)\} = O(y, \succeq) \text{ (abgeschlossen)}$$

Fall 2: Es gibt eine (offene) Lücke $I = (a, b)$ von $u(X)$ mit $\alpha \in I$. Dann gilt

$$\{u \geqq \alpha\} = \{u \geqq b\} \text{ (abgeschlossen nach Fall 1)}$$

Fall 3: Es gibt drei weitere Möglichkeiten: $\alpha \leqq \inf u$ oder $\alpha > \sup u$ oder es gibt eine Folge $\alpha_n \nearrow \alpha$ und $\alpha_n \in u(X)$ für alle n.[6] Die ersten beiden dieser Möglichkeiten sind trivial; im letzten Fall gilt

$$\{u \geqq \alpha\} = \bigcap_n \underbrace{\{u \geqq \alpha_n\}}_{\text{abg. nach Fall 1}} \quad \text{(abgeschlossen)}$$

Der Beweis von (5.2) ist analog. □

5.14 Lemma. *Seien I und J zwei nichtleere offene Intervalle in $\mathbb{R}$ und $A \subset I, B \subset J$ abzählbare dichte Teilmengen. Dann existiert eine streng monoton wachsende bijektive Funktion $g : A \to B$.*

Beweis. Sei $A = \{a^1, a^2, \ldots\}$ und $B = \{b^1, b^2, \ldots\}$
1. Schritt: Setze $a_1 := a^1$ und $b_1 := b^1$.
2. Schritt: Setze $b_2 := b^2$. Falls $b_2 > b_1$ $(b_2 < b_1)$, wähle $a_2 \in A$ mit $a_2 > a_1$ $(a_2 < a_1)$.
3. Schritt: Wähle $a^k \in A \setminus \{a_1, a_2\}$ mit minimalem k; setze $a^3 := a^k$. Wähle $b_3 \in B$ so dass die Lage relativ zu b_1 und b_2 der Lage von a_3 zu a_1 und a_2 entspricht.
4. Schritt: Wähle $b^k \in B \setminus \{b_1, b_2, b_3\}$ mit minimalem k und setze $b_4 := b^k$. Wähle ein „passendes" a_4.
Fährt man so fort, so erhält man Folgen $a_n \in A$ und $b_n \in B$ mit $a_i < a_j \Leftrightarrow b_i < b_j$.
Nach Konstruktion gilt $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Daher wird durch $g(a_i) := b_i$ eine Funktion mit den gewünschten Eigenschaften definiert. □

[6] das passiert, wenn α ein „Loch" in $u(X)$ ist oder $\sup u = \alpha \notin u(X)$.

5.15 Lemma. *Sei $\emptyset \neq S \subset [0,1]$.*
Dann existiert eine streng monoton wachsende Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ derart, dass alle Lücken von $f(S)$ offen sind.

Beweis (Bowen). Sind alle Lücken von S offen, so ist nichts zu zeigen.

Andernfalls existieren höchstens abzählbar viele (disjunkte) Lücken I_n, die nicht offen sind. Sei $T := \bigcup_n I_n$. Wir definieren (für $x \in [0,1]$)

$$g(x) := x - \lambda(T \cap [0,x]) \qquad \text{(Lebesgue-Maß)}$$

Dann gilt:

i) g ist monoton nicht fallend und stetig, denn:

$$y \geqq x \quad \Rightarrow \quad y - x \geqq g(y) - g(x) = -\underbrace{\lambda(T \cap [x,y])}_{\leqq\, y-x} + y - x \geqq 0$$

insbesondere gilt $g|_{I_n} \equiv const.$

ii) Sei $\mathcal{H} := \{H = (\{g = t\} \cap S) : t \in \mathbb{R}, |H| > 1\}$. Aus (i) folgt, dass die Mengen $\{g = t\}$ paarweise disjunkte (abgeschlossene) Intervalle sind, also $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \ldots\}$.

iii) Wenn $a, b \in H_k$ mit $a < b$ sind, dann gibt es ein $c \in H_k$ mit $a < c < b$. Bei Annahme des Gegenteils erhält man

$$\emptyset = H_k \cap (a,b) \underbrace{=}_{g|_{(a,b)} \equiv const.} S \cap (a,b) \quad \Rightarrow \quad (a,b) \text{ offene Lücke von } S \quad \Rightarrow \quad (a,b) \cap T = \emptyset$$

$$\Rightarrow \quad g(b) > g(a) \quad \text{(Widerspruch)}$$

iv) Sei D_k eine abzählbare dichte Teilmenge von H_k (welche nach (iii) existiert). Mit vorigem Lemma schließen wir auf eine streng monoton wachsende bijektive Funktion

$$g_k : D_k \backslash \{\inf D_k, \sup D_k\} \to (0, 2^{-k}) \cap \mathbb{Q}$$

Falls D_k ein Minimum bzw. Maximum hat, definiert man

$$g_k(\inf D_k) := 0 \quad \text{bzw.} \quad g_k(\sup D_k) := 2^{-k}$$

Für $x \in [0,1]$ sei

$$h_k(x) := \begin{cases} g_k(x) & x \in D_k \\ 0 & x \leqq \inf D_k \\ \sup\limits_{z \in D_k,\, z \leqq x} g_k(z) & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist h_k monoton nicht fallend und stetig, da $h_k([0,1])$ keine Lücken enthält (h_k ist eine Nutzenfunktion auf $\bar{D}_k$ bzgl. der üblichen Ordnung, woraus nach 5.13 die Stetigkeit folgt).

v) Setze

$$r(x) = \sum_k h_k(x)$$

Dann ist r stetig, da

$$0 \leqq r(x) - \sum_{k=1}^{N} h_k(x) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \underbrace{h_k(x)}_{\leqq 2^{-k}} \leqq 2^{-N} \to 0$$

und der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen stetig ist.

Nun definieren wir die stetige Funktion

$$f := g + r$$

vi) f ist streng monoton wachsend auf S, denn:

h_k ist monoton nicht fallend, somit auch r.

Seien $x, y \in S$ mit $x < y$.

Fall 1: $\exists k : x, y \in H_k$; nach (iii) und weil D_k dicht in H_k ist, gibt es ein $z_1 \in D_k \cap (x,y)$ und ein $z_2 \in D_k \cap (z_1, y)$. Jetzt gilt:

$$h_k(x) \leqq h_k(z_1) = g_k(z_1) < g_k(z_2) = h_k(z_2) \leqq h_k(y)$$

Fall 2: Falls x und y nicht in einem gemeinsamen H_k liegen, so gilt $g(x) < g(y)$ aufgrund der Definition der H_k's.

vii) Es bleibt zu zeigen, dass $f(S)$ nur offene Lücken hat.

Annahme: $f(S)$ hat eine Lücke I mit $b = \sup I \in I$. Da I ein nicht entartetes Intervall ist, gibt es $a < b$ mit $a \in I$, folglich $[a,b] \cap f(S) = \emptyset$. Wenn man nun $c \in \{f = a\}$ und $d := \max\{f = b\}$ setzt, gilt $c < d$, sowie $d \notin S$. Aber es gibt eine Folge $(b_n)_n$, die von oben gegen b konvergiert mit $b_i \in f(S)$. Insbesondere gibt es $\tilde{b}_i \in S$ mit $f(\tilde{b}_i) = b^i$. Aufgrund der Stetigkeit von f^{-1} (die mit der Monotonie von f begründet wird) gilt $\tilde{b}_i \searrow d$; d.h. d ist ein Häufungspunkt von S.

Es gilt $[c,d] \cap S = \emptyset$ (sonst $a = f(c) \leqq f(x) \leqq f(d) = b$ für ein $x \in S$), also $[c,d] \subset T$ (da d ein Häufungspunkt von S ist, ist $[c,d]$ Teil einer nicht-offenen Lücke), folglich $g(c) = g(d)$. Es gilt jedoch für alle k, dass $([c,d] \cap H_k) \subset [c,d] \cap S = \emptyset$; also $h_k(c) = h_k(d)$. Jetzt haben wir $a = f(c) = f(d) = b$, ein Widerspruch.

Analog folgt $\inf I \notin I$ für jede Lücke I. □

Anmerkung des Autors: Was anschaulich passiert ist das Folgende: Die nicht-offenen Lücken werden „zusammengeschoben“; halboffene werden geschlossen und von geschlossenen bleibt nur eine Einpunkt-Lücke übrig. Die Konstruktion ist deswegen so kompliziert, weil es abzählbar viele solcher Lücken geben kann, sowie „Löcher“ bzw. Einpunkt-Lücken. Dennoch denke ich, dass man den letzten Beweisschritt mit dieser Anschauung wie folgt vereinfachen kann:

Beweis. *vii)* Da f stetig und streng monoton auf S ist, sind alle Lücken in $f(S)$ Bilder von Lücken in S, unterschiedliche Lücken schneiden sich im Bild nicht und offene Lücken werden auf offene Lücken abgebildet.

Es genügt also zu zeigen, dass $f|_{I_n} \equiv const$ für alle n gilt.

Wir wissen $g|_{I_n} \equiv const$. Es gilt $I_n \cap H_k = \emptyset$ für alle k. Daraus folgt $I_n \cap D_k = \emptyset$, woraus (da I_n ein Intervall ist) $h_k|_{I_n} \equiv const$ folgt, was die Behauptung beweist. □

5.16 Satz. *Sei X ein topologischer Raum mit einer Präferenzordnung $\succeq$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

i) $\succeq \, = \, \succeq^u$ *für ein stetiges u.*

ii) $\succeq \, = \, \succeq^v$ *für ein v und $\succeq$ ist abgeschlossen.*

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Das folgt aus 5.9.a.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Sei $\succeq \, = \, \succeq^v$. Nach 5.7 können wir $v(X) \subset [0,1]$ annehmen.

Für $S = v(X)$ wähle f gemäß dem vorigen Lemma 5.15 und setze $u = f \circ v$. Dann gilt $\succeq \, = \, \succeq^u$, und aus 5.13 folgt, dass u stetig ist. □

5.17 Satz von Debreu

5.17 Satz. *Sei $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^n$ und $\succeq$ eine abgeschlossene Präferenzordnung auf X. Dann existiert eine stetige Nutzenfunktion zu $\succeq$.*

Beweis. Sei $\mathcal{K}$ die Menge aller Kugeln $K^m(x) := \{z \in \mathbb{R}^n : \|x - z\| < 1/m\}$ mit $x \in \mathbb{Q}^n$.

Dann ist $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, \dots\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis in $\mathbb{R}^n$ (d.h. im Wesentlichen, dass für jedes Element x einer offenen Menge U ein n mit $x \in K_n \subset U$ existiert).

Setze $B_n := K_n \cap X$ für $n \in \mathbb{N}$ sowie für $x \in X$

$$\begin{aligned} N_x &:= \{n \in \mathbb{N} : B_n \subset U(\succ, x)\} \\ v(x) &:= \sum_{n \in N_x} 2^{-n} \end{aligned}$$

Dann ist $\succeq^v \, = \, \succeq$, denn:

Aufgrund der Transitivität von $\succeq$ folgt aus $y \preceq z$, dass $N_y \subset N_z$ ist, und somit $v(y) \leqq v(z)$ gilt.

Sei nun $v(y) \leqq v(z)$. Nehmen wir $y \succ z$ an, d.h. $z \in U(\succ, y)$, einer offenen Menge. Es gibt also ein n mit $z \in B_n \subset U(\succ, y)$. Das bedeutet $n \in N_y \backslash N_z$ (da $z \notin U(\succ, z)$). Wir erhalten (mit $y \succ z$): $N_y \supsetneqq N_z$, also $v(y) > v(z)$, der gewünschte Widerspruch.

Die Behauptung folgt nun aus dem vorherigen Satz. □

Literatur zu Kapitel 5: [**AH**], [**De**], [**HK**], [**Ro 2**]

ferner auch: [**Bo**] Bowen, R.: *A new proof of a theorem in utility theory.* Economic Review 9 (1968), S. 374.