3 Binäre Relationen

Es sei X eine nichtleere Menge; dann heißt eine Teilmenge $\succeq$ von $X \times X$ *binäre Relation.*

Schreibweise:

$$\begin{aligned}
&x \succeq y :\Leftrightarrow (x,y) \in X \times X \wedge (x,y) \in \succeq \\
&x \succeq y :\Leftrightarrow \text{„}x \text{ ist mindestens so gut wie } y.\text{“} \\
&y \preceq x :\Leftrightarrow x \succeq y \\
&x \sim y :\Leftrightarrow x \succeq y \wedge y \succeq x \\
&x \sim y :\Leftrightarrow \text{„}x \text{ und } y \text{ sind gleich gut.“} \\
&x \succ y :\Leftrightarrow x \succeq y \wedge \neg(y \succeq x) \\
&x \succ y :\Leftrightarrow \text{„}x \text{ ist besser als } y.\text{“}
\end{aligned}$$

Bei den Interpretationen wie oben spricht man von einer *Präferenzrelation.* Dies ist nur eine Bezeichnung und hat mit der unten definierten Präferenzordnung nichts zu tun.

3.1. Beispiel. a) $X = \mathbb{R}$ mit der üblichen Ordnung.

b) Ist $X = \{1, \ldots, n\}$, so kann jede binäre Relation als gerichteter Graph mit n Knoten $p_1, \ldots, p_n$ interpretiert werden. Ein Paar (p_i, p_j) ist genau dann eine gerichtete Kante, wenn $(j,i) \in \succeq$, d.h. $j \succeq i$ ist. ♢

3.2. Definition. Gegeben sei eine binäre Relation $\succeq \subset X \times X$. Die folgenden Bedingungen müssen jeweils für alle $x, y, z \in X$ gelten. Die Relation heißt

reflexiv wenn $x \succeq x$ für alle $x \in X$ gilt.

transitiv falls $(x \succeq y \wedge y \succeq z) \Rightarrow (x \succeq z)$

negativ transitiv falls $(\neg(x \succeq y) \wedge \neg(y \succeq z)) \Rightarrow \neg(x \succeq z)$

vollständig falls $x \succeq y \vee y \succeq x$ (dann ist sie insbesondere reflexiv!)

antisymmetrisch falls $(x \succeq y \wedge y \succeq x) \Rightarrow (x = y)$

symmetrisch falls $(x \succeq y) \Rightarrow (y \succeq x)$

asymmetrisch falls $(x \succeq y) \Rightarrow \neg(y \succeq x)$

Äquivalenzrelation falls sie reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

Teilordnung falls sie reflexiv und transitiv ist.[4]

Halbordnung falls sie eine antisymmetrische Teilordnung ist.[5]

Präferenzordnung falls sie transitiv und vollständig ist.

Ordnung falls sie eine vollständige Halbordnung ist.

[4] Eine Teilordnung wird gelegentlich auch *Präordnung* (engl. *preorder*) genannt.
[5] engl. *partial order*, oder (inkl. der zugrunde liegenden Menge) *poset*.

3.3. Bemerkung. Es sei $\succeq$ eine transitive binäre Relation auf X. Dann ist $\sim$ transitiv und symmetrisch, und $\succ$ ist transitiv und asymmetrisch.
Ist zudem $\succeq$ reflexiv, so ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.
Ist $\succeq$ vollständig, so ist $\succ$ negativ transitiv.

Beweis. Übung. □

Weiter definieren wir:

$$\begin{aligned}
O(\succeq, x) = O(x) &:= \{y \in X : y \succeq x\} \\
U(\succeq, x) = U(x) &:= \{y \in X : x \succeq y\} \\
E(\succeq, x) = E(x) &:= \{y \in X : x \sim y\}
\end{aligned}$$

3.4. Beispiel. Für $X \subset \mathbb{R}^n_+$ sei $x \succeq y$ falls ein $k \in \{0, \ldots, n\}$ existiert, so dass $x_i = y_i$ für alle $i \leqq k$ gilt und, falls $k < n$, zusätzlich $x_{k+1} > y_{k+1}$ ist. Diese Relation heißt *lexikographische Ordnung.* Sie ist insbesondere eine Ordnung im obigen Sinne. ♢

3.5. Definition. Es sei $\succeq$ eine binäre Relation auf X. Für $\emptyset \neq Y \subset X$ heißt ein $y \in Y$ *maximal* in Y, falls gilt

$$x \in Y,\ x \succeq y \quad \Rightarrow \quad x \sim y$$

y heißt *dominierend* (oder *größtes Element*) in Y, falls für alle $x \in Y$ gilt:

$$y \succeq x$$

Schreibweise:

$$\begin{aligned}
\max(Y, \succeq) &:= \{y \in Y : y \text{ ist maximal in Y}\} \\
\operatorname{dom}(Y, \succeq) &:= \{y \in Y : y \text{ ist dominierend in Y}\}
\end{aligned}$$

Ein $x \in X$ heißt *obere (untere) Schranke* von Y (für eine Teilmenge Y von X), wenn für alle $y \in Y$ gilt:

$$x \succeq y \text{ (bzw. } x \preceq y)$$

3.6. Beispiel.

$$X = \{1,2,3\}, \quad \succeq = \{(2,1),(3,1)\}$$

(vgl. 3.1.b). Hier ist $\max(X, \succeq) = \{2,3\}$ und $\operatorname{dom}(X, \succeq) = \emptyset$. ♢

3.7 Lemma von Zorn

3.7. Lemma. *Sei $\succeq$ eine Teilordnung auf X. Jede Teilmenge $Y \subset X$, für die $\succeq \cap\, Y \times Y$ vollständig ist (dann heißt Y* Kette*), besitze eine obere Schranke. Dann ist* $\max(X, \succeq) \neq \emptyset$.

Beweis. Dieses Lemma ist äquivalent zum Auswahlaxiom; es wird gelegentlich auch als *Zornsches Lemma* bezeichnet. □

3.8. Definition. Es sei $\succeq$ eine binäre Relation auf X.

a) Ist $X \subset \mathbb{R}^n$, so heißt $\succeq$

monoton falls $x \geqq y \Rightarrow x \succeq y$
streng monoton falls $x \geq y \Rightarrow x \succ y$

für alle $x, y \in X$ gilt.

b) Ist X eine konvexe Teilmenge eines linearen Raumes, dann heißt $\succeq$

konvex falls $x \succ y,\ \lambda \in (0,1) \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)x + \lambda y \succ y$.
(Beispiel: Ist mir eine Flasche Wein lieber als eine Flasche Saft, so ist mir auch eine halbe Flasche Wein und eine halbe Flasche Saft lieber als eine Flasche Saft.)

schwach konvex falls $x \succeq y,\ \lambda \in (0,1) \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)x + \lambda y \succeq y$

streng konvex falls $x \succeq y,\ x \neq y,\ \lambda \in (0,1) \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)x + \lambda y \succ y$

für alle $x, y \in X$ gilt.

c) Ist X ein topologischer Raum, dann heißt $\succeq$

abgeschlossen (oder **stetig**), falls für alle x die Mengen $O(\succeq, x)$ und $U(\succeq, x)$ abgeschlossen sind.

halbstetig Sind lediglich alle Mengen $O(\succeq, x)$ (bzw. alle Mengen $U(\succeq, x)$) abgeschlossen, so heißt $\succeq$ *nach oben (bzw. nach unten) halbstetig.*

3.9. Satz (⊛). *Es sei $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $\succeq$ eine Präferenzordnung auf X.*

a) Ist $\succeq$ streng konvex, so auch konvex und schwach konvex.

b) Genau dann ist $\succeq$ schwach konvex, wenn jedes $O(\succeq, x)$ konvex ist.

c) Genau dann ist $\succeq$ schwach konvex, wenn jedes $O(\succ, x)$ konvex ist.

d) Ist $\succeq$ konvex und abgeschlossen, so auch schwach konvex.

e) Genau dann ist $\succeq$ stark konvex, wenn es schwach konvex ist, und kein $E(\succeq, x)$ ein Geradenstück enthält.

Beweis. a) klar.

b) Übung.

c) „$\Rightarrow$“: Seien $x, y \in O(\succ, z)$; es gelte oBdA $x \succeq y$. Für

$$z^\lambda := \lambda x + (1-\lambda)y$$

gilt $z^\lambda \succeq y \succ z$. Es kann nicht $z \succeq z^\lambda$ gelten, da dies $z \succeq y$ implizieren würde.

„$\Leftarrow$“: Sei $x \succeq y$. Wir müssen zeigen, dass $z^\lambda \succeq y$ für alle λ gilt. Wäre $z^{\lambda_0} \prec y \preceq x$, so würde wie oben $z^{\lambda_0} \prec x$ folgen. Das wäre ein Widerspruch zur Konvexität von $O(\succ, z^{\lambda_0})$.

d) Sei $x \succeq y$. Wir müssen zeigen, dass dann $z^\lambda \succeq y$ für alle $\lambda \in [0,1]$ gilt. Nehmen wir $z^{\lambda_0} \prec y$ an. Dann gibt es aufgrund der Offenheit von $U(\succ, y) = O(\succeq, y)^C$ ein $\lambda_1 < \lambda_0$ mit $z^{\lambda_1} \prec y$. Nun gilt

$$z^{\lambda_1} \in (z^{\lambda_0}, y) \text{ sowie } z^{\lambda_0} \in (z^{\lambda_1}, x) \text{ mit } (a,b) := \{\alpha a + (1-\alpha)b : \alpha \in (0,1)\}.$$

Daraus folgt mit der Konvexität von $\succeq$ sowohl $z^{\lambda_1} \succ z^{\lambda_0}$ als auch $z^{\lambda_0} \succ z^{\lambda_1}$, ein Widerspruch.

e) „$\Rightarrow$“: Aufgrund der strengen Konvexität folgt $z^\lambda \not\sim x$ für $x \sim y, x \neq y$, und die schwache Konvexität ist klar.

„$\Leftarrow$“: Sei $x \succeq y, x \neq y$. Aufgrund der schwachen Konvexität ist $z^\lambda \succeq y$ für $\lambda \in (0,1)$ und aus $y \succeq z^\lambda$ würde (ebenfalls mit der schwachen Konvexität) $(y, z^\lambda) \subset E(\succeq, y)$ folgen. □

Bemerkung (⊛): Eine konvexe Präferenzordnung auf $\mathbb{R}$, die nicht schwach konvex ist, erhält man z.B., wenn man als Nutzenfunktion (vgl. Kapitel 5) die charakteristische Funktion von $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

3.10. Satz (Sloss). *Sei $\emptyset \neq X$ ein kompakter topologischer Raum und $\succeq$ eine binäre Relation auf X derart, dass gilt:*

(i) $\succ$ ist azyklisch, d.h. es gibt keine $x_1, \ldots, x_n \in X$ mit

$$x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_n \prec x_1$$

(ii) Jedes $U(\succ, x)$ ist offen.

Dann ist $\max(X, \succeq)$ abgeschlossen und nicht leer.

Bemerkung: Jede abgeschlossene Präferenzordnung erfüllt diese Bedingungen.

Beweis. Aus der Identität

$$\max(X, \succeq) = \bigcap_{x \in X} U(\succ, x)^C \tag{3.1}$$

folgt die Abgeschlossenheit der zu untersuchenden Menge. Annahme: $\max(X, \succeq) = \emptyset$. Dann gilt

$$\bigcup_{x \in X} \underbrace{U(\succ, x)}_{\text{offen}} = X \underset{X \text{ kompakt}}{\Rightarrow} \text{es existiert eine endliche Teilüberdeckung mit } \bigcup_{i=1}^m U(\succ, x_i) = X$$

Aber: Nach (i) gibt es ein maximales Element y in der Menge $\{x_i : 1 \leqq i \leqq m\}$. D.h. $\neg(x_i \succ y)$ für alle i. Nun ergibt sich der folgende Widerspruch:

$$y \notin \bigcup_{i=1}^m U(\succ, x_i) = X$$ □

3.11. Satz (⊛). *Sei X ein topologischer Raum und $\succeq$ eine Präferenzordnung darauf. Dann sind äquivalent:*

(i) $\succeq$ ist abgeschlossen (d.h. stetig)

(ii) $\succeq$ ist abgeschlossen in $X \times X$ bzgl. der Produkttopologie.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Zunächst bemerken wir, dass für alle x die Menge $U(\prec, x) = O(\succeq, x)^C$ offen ist. Wir zeigen, dass $\succeq^C$ offen ist.
Sei $(\bar{x}, \bar{y}) \notin \succeq$, d.h. $\bar{y} \succ \bar{x}$.
1. Fall: Es gibt ein $\hat{x}$ mit $\bar{y} \succ \hat{x} \succ \bar{x}$. Dann ist

$$G := U(\succ, \hat{x}) \times O(\succ, \hat{x})$$

eine offene Umgebung von $(\bar{x}, \bar{y})$ und es gilt $G \cap \succeq = \emptyset$.

2. Fall: Es existiert kein $\hat{x}$, das $\bar{y} \succ \hat{x} \succ \bar{x}$ erfüllt.
Dann gilt $U(\succ, \bar{y}) = U(\succeq, \bar{x})$ und $O(\succ, \bar{x}) = O(\succeq, \bar{y})$ (wie man leicht nachprüft), und

$$G := U(\succeq, \bar{x}) \times O(\succeq, \bar{y}) = \underbrace{U(\succ, \bar{y})}_{\text{offen}} \times \underbrace{O(\succ, \bar{x})}_{\text{offen}}$$

ist eine offene Umgebung von $(\bar{x}, \bar{y})$, die $G \cap \succeq = \emptyset$ erfüllt.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Das ist der erste Teil von 8.6 für $x \mapsto O(\succeq, x)$ bzw. $x \mapsto U(\succeq, x)$; oder direkt wie folgt: Zu zeigen:

$$Y := O(\succeq, y) = \{x \in X : (x, y) \in \succeq\}$$

ist abgeschlossen für alle $y \in X$. Wir zeigen, dass Y^C offen ist.

Sei $x \in Y^C$. Dann gilt $(x, y) \notin \succeq$. Aufgrund der Abgeschlossenheit von $\succeq$ gibt es eine Umgebung U von (x, y), die leeren Schnitt mit $\succeq$ hat; insbesondere ist $U \cap (X \times \{y\})$ eine Umgebung von x mit den gewünschten Anforderungen.

Dass $U(\succeq, y)$ abgeschlossen ist folgt analog. $\square$

3.12 Filter und Ultrafilter

3.12. Definition. Sei G eine nichtleere Menge.

a) Ein nichtleeres $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(G)$ heißt *Filter*, wenn gilt:

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

(ii) $A, B \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; A \cap B \in \mathcal{F}$

(iii) $A \in \mathcal{F},\; B \supset A \;\Rightarrow\; B \in F$

bzw. *Ultrafilter*, wenn gilt:

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

(ii) $A, B \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; A \cap B \in \mathcal{F}$

(iv) $A \in \mathcal{F}$ oder $A^C \in \mathcal{F}$ für jede Teilmenge A von G

b) Ein Filter heißt *frei*, wenn $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$ ist, andernfalls heißt $\mathcal{F}$ *fixiert*.

3.13. Lemma. *a) Jeder Ultrafilter ist ein Filter.*

b) Jeder Filter ist in einem Ultrafilter enthalten.

c) Ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ ist genau dann fixiert, wenn es ein $z \in G$ mit $\mathcal{U} = \{F \subset G : z \in F\}$ gibt.

Beweis. a) Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(G)$ ein Ultrafilter. Sei $A \in \mathcal{U}$ und $B \supset A$.

Falls $B \notin \mathcal{U}$, dann ist $B^C \in U$ und somit $\emptyset = A \cap B^C \in \mathcal{U}$ (nach (ii) und (iv)); ein Widerspruch, der zu zeigen war.

b) Es sei $\mathcal{F}_0$ ein Filter in G. Sei

$$\Phi := \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ ist ein Filter mit } \mathcal{F} \supset \mathcal{F}_0\}$$

Durch die Inklusion wird eine Teilordnung auf Φ definiert.

Für eine Kette ist ihre Vereinigung wieder ein Filter (wie man leicht nachrechnet), also enthält Φ zu jeder Kette eine obere Schranke, und wir können Zorn's Lemma anwenden:

Es gibt einen maximalen Filter $\mathcal{U} \supset \mathcal{F}_0$.

Wir behaupten, dass $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist. Sei $A \subset G$; wir wollen zeigen, dass entweder A oder A^C in $\mathcal{U}$ liegt. Es gilt entweder

$$U \cap A \neq \emptyset \text{ für alle } U \in \mathcal{U}$$

oder

$$U \cap A^C \neq \emptyset \text{ für alle } U \in \mathcal{U}$$

(sonst ergibt sich ein Widerspruch wie im Beweisteil (a)).

OBdA untersuchen wir den ersten Fall. Sei

$$\mathcal{U}_0 := \{B \subset G : \exists U \in \mathcal{U} \text{ mit } B \supset (U \cap A)\}$$

Dann ist $\mathcal{U}_0$ ein Filter mit $\mathcal{U}_0 \supset \mathcal{U}$ (wie man leicht nachprüft). Aufgrund der Maximalität von $\mathcal{U}$ gilt $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0$.

Nun folgt aus $G \in \mathcal{U}$ (wegen $G \supset U$ für alle $U \in \mathcal{U}$), dass $A \in \mathcal{U}$ gilt (wegen $A = A \cap G$).

c) Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter. Ist $\mathcal{U}$ fixiert, so existiert ein $z \in G$ mit $z \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$.

Für $A \notin \mathcal{U}$ ist $A^C \in \mathcal{U}$. Dann ist $z \in A^C$, und $z \notin A$. Somit ist

$$\mathcal{U} = \{F \subset G : z \in F\}$$

Die Umkehrung ist trivial. $\square$

3.14. Lemma (⊛). *Ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf G ist genau dann fixiert, wenn er eine endliche Menge enthält.*

Beweis. Sei E eine endliche, in $\mathcal{U}$ enthaltene Menge. Wenn der Ultrafilter $\mathcal{U}$ nicht fixiert ist, so ist $\{z\}^C \in \mathcal{U}$ für alle $z \in G$. Mit $E = \{g_1, \ldots, g_n\}$ folgt $\emptyset = E \cap \bigcap_{i=1}^n \{g_i\}^C \in \mathcal{U}$, ein Widerspruch.

Die andere Richtung ist klar wegen (c) des obigen Lemmas. $\square$

Literatur zu Kapitel 3: [**Fi 1**], [**Fi 2**], [**Ro 2**].