# 11 Kooperatives Verhalten

Die bisher betrachteten Modelle waren rein „kompetitiv“, d.h. das wettbewerbsmäßige Verhalten der Marktteilnehmer stand im Vordergrund. In diesem Abschnitt soll nun auch Kooperation erlaubt sein, und deren Konsequenzen sollen untersucht werden. Wie in Kapitel 9 gehen wir von einer P-Ökonomie aus:

$$\mathcal{P} = \big((X^i, \succeq^i, a^i), (\theta_{ij}), (Y^j)\big)^{j\in K}_{i\in M}$$

Wir setzen im Folgenden voraus, dass die Aktionsbereiche $Y^j$ der Produzenten konvex sind, und dass $0 \in Y^j$ gilt; d.h. es ist erlaubt, nichts zu produzieren.

Der Konsument $i$ verfügt über den Anteil $\theta_{ij}$ an der Produktionsstätte $j$, er kann also dort Güterbündel aus der Menge $\theta_{ij}Y^j$ produzieren. Es gilt dann $\theta_{ij}Y^j \subset Y^j$ wegen $0 \in Y^j$ und der Konvexität von $Y^j$ sowie

$$\bigoplus_{i\in M} \theta_{ij} Y^j = Y^j \tag{11.1}$$

Eine Teilmenge $S$ von $M$ heiße *Koalition.* Jede nichtleere Koalition definiert wie folgt eine Teilökonomie

$$\mathcal{P}_S := \big((X^i, \succeq^i, a^i), (\theta_{S,ij}), (Y^j_S)\big)^{i\in S}_{j\in K}$$

mit

$$\begin{aligned} Y^j_S &:= \bigoplus_{i\in S} \theta_{ij} Y^j \\ \theta_{S,ij} &:= \frac{\theta_{ij}}{\sum_{k\in S}\theta_{kj}} \qquad \text{falls } \sum_{k\in S}\theta_{kj} > 0 \\ \theta_{S,ij} &:= \frac{1}{|S|} \qquad \text{falls } \sum_{k\in S}\theta_{kj} = 0 \end{aligned}$$

Ferner schreiben wir $a_S := \sum_{i\in S} a^i$.

**11.1. Definition.** Seien $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}_S$ für eine nichtleere Teilmenge $S$ von $M$ definiert wie oben. Ferner sei

$$A_S := \left\{(x,y) \in \prod_{i\in S} X^i \times \prod_{j\in K} Y^j_S : \sum_{i\in S} x^i \leqq \sum_{j\in K} y^j + a_S\right\}$$

die Menge der verschiedenen Aktionen in der Koalition $S$.

a) Eine Allokation (Gesamtaktion) $(x,y) \in A := A_M$ heißt durch die Koalition $S$ *blockierbar,* wenn es ein $(\tilde{x},\tilde{y}) \in A_S$ gibt mit $\tilde{x}^i \succ^i x^i$ für alle $i \in S$.

b) Die Menge $C(\mathcal{P})$ aller $(x,y) \in A$, welche durch keine Koalition $S$ blockierbar sind, heißt das *Core (bzw. der Kern)* von $\mathcal{P}$.

Wenn der Begriff „Gleichgewicht“ von $\mathcal{P}$ eine stabile Situation beschreibt, so sollte man annehmen, dass für jedes Gleichgewicht $(\bar{x},\bar{y},\bar{p})$ die Aktion $(\bar{x},\bar{y})$ im Core liegt.

Ist nämlich $(\bar{x},\bar{y})$ von $S$ blockierbar, so besteht für die Koalition $S$ der Anreiz, autark zu agieren, wo dann durch die Wahl eines $(\tilde{x},\tilde{y}) \in A_S$ mit $\tilde{x}^i \succ^i x^i$ sich jeder Konsument $i \in S$ besser stellen kann.



**11.2. Satz (⊛).** *Ist $(\bar{x},\bar{y},\bar{p})$ ein Gleichgewicht in der $\mathcal{P}$-Ökonomie $\mathcal{P}$, so liegt $(\bar{x},\bar{y})$ im Core von $\mathcal{P}$.*

**Beweis.** Sei $(\bar{x},\bar{y},\bar{p})$ ein Gleichgewicht. Angenommen, es existiert eine nichtleere Koalition $S$, so dass es ein $(\tilde{x},\tilde{y}) \in A_S$ mit $\tilde{x}^i \succ^i \bar{x}^i$ für alle $i \in S$ gibt.

Sei $\alpha_j := \sum_{i\in S}\theta_{ij}$. Analog zu (11.1) können wir $Y^j_S = \alpha_j Y^j$ schließen. Nun gilt (für alle $j \in K$)

$$\bar{p}^t\tilde{y}^j \leqq \alpha_j \bar{p}^t \bar{y}^j \tag{11.2}$$

im Falle $\alpha_j = 0$ trivialerweise; andernfalls folgt diese Ungleichung wegen

$$\bar{p}^t \underbrace{\frac{\tilde{y}^j}{\alpha j}}_{\in \frac{1}{\alpha_j} Y^j_S = Y^j} \leqq \sup_{y^j\in Y^j} \bar{p}^t y^j \underset{\text{(nach Def.)}}{=} \bar{p}^t \bar{y}^j$$

Nun schließen wir

$$\begin{aligned} \bar{p}^t \sum_{i\in S} \tilde{x}^i &\underset{\text{wg. } (\tilde{x},\tilde{y}) \in A_S}{\leqq} \bar{p}^t a_S + \sum_{j\in K} \bar{p}^t \tilde{y}^j \underset{(11.2)}{\leqq} \bar{p}^t a_S + \sum_{j\in K} \alpha_j \bar{p}^t \bar{y}^j \\ &= \bar{p}^t a_S + \sum_{j\in K}\sum_{i\in S} \theta_{ij} \bar{p}^t \bar{y}^j = \bar{p}^t a_S + \sum_{j\in K}\sum_{i\in S} \theta_{ij} \rho^j(\bar{p}) \\ &= \sum_{i\in S} r^i(\bar{p}) \end{aligned}$$

Es muss aber $\tilde{x}^i \notin B^i(\bar{p})$ für alle $i \in S$ gelten, da $\bar{x}^i$ als Gleichgewichtspunkt maximal in $B^i(\bar{p})$ ist. Damit ist $\bar{p}^t\tilde{x}^i > r^i(\bar{p})$ für alle $i \in S$ und wir haben einen Widerspruch zu der eben hergeleiteten Ungleichung erreicht. □

**11.3. Beispiel (Das Core in der Edgeworthbox).** Gegeben sei die Situation $\mathcal{P} = \mathcal{E}$ aus Beispiel 4.6, d.h. $m = n = 2$, $X^i = \mathbb{R}^2_+$, die Präferenzordnungen $\succeq^i$ seien (streng) monoton und $k = 1$, $Y^1 = \{0\}$. Ein $\bar{x}$ ist im Core von $E$, wenn $\bar{x} \in A$ ist und wenn es zu $\emptyset \neq S \subset \{1,2\}$ kein $\tilde{x} \in A_S$ gibt mit $\tilde{x}^i \succ^i \bar{x}^i$ für alle $i \in S$.

Für $S = \{1,2\}$ heißt das: Es darf kein $\tilde{x} = (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2)$ geben mit $\tilde{x}^1 + \tilde{x}^2 \leqq a^1 + a^2$ und $\tilde{x}^i \succ^i \bar{x}^i$.
*Das heißt: $\bar{x}$ muss Pareto-optimal sein.*

Für $S = \{i\}$: Es darf kein $\tilde{x}^i$ geben mit $\tilde{x}^i \leqq a^i$ und $\tilde{x}^i \succ^i \bar{x}^i$. Dies ist äquivalent zu der Aussage

$$\tilde{x}^i \leqq a^i \Rightarrow \tilde{x}^i \preceq^i \bar{x}^i$$

was wiederum äquivalent ist zu $a^i \preceq^i \bar{x}^i$.

Also besteht das Core aus denjenigen Punkten auf der Kontraktkurve (Pareto-Optima), welche von beiden Konsumenten gegenüber den Anfangsausstattungen bevorzugt werden (vgl. Skizze (4.1)). ◇

Wir wollen nun noch eine Querverbindung zur Theorie der kooperativen Spiele herstellen und gehen aus von der folgenden Definition:

**11.4. Definition.** Ein *kooperatives $m$-Personenspiel* ist eine Abbildung $W : \mathcal{P}(M) \to \mathbb{R}_+$ (mit $M := \{1,\ldots,m\}$) mit

*i)* $W(\emptyset) = 0$

*ii)* $W(S) + W(T) \leqq W(S \cup T)$ für alle disjunkten $S, T \subset M$. ($W$ ist superadditiv.)

Die Teilmengen $S \subset M$ heißen Koalitionen.

Mit $\mathcal{S}_m$ bezeichnen wir die Menge aller solchen Spiele.

**Interpretation:** $W(S)$ ist der *Nutzen* der Koalition $S$.

Bedingung $(i)$ ist technischer Natur, um Fallunterscheidungen zu vermeiden.

Bedingung $(ii)$ bedeutet: Schließen sich zwei Koalitionen $S$ und $T$, welche keine gemeinsamen Mitglieder haben, zur Koalition $S \cup T$ zusammen, so ist ihr Gesamtnutzen mindestens so groß wie die Summe der Einzelnutzen (Synergie).

**11.5. Definition.** Für ein $W \in \mathcal{S}_m$ heißt

$$C(W) = \Big\{\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)^t : \sum_{i \in M} \mu_i = W(M), \sum_{i \in S} \mu_i \geqq W(S) \text{ für alle } S \subset M\Big\}$$

das *Core* von $W$.

**Interpretation:** Spieler $i$ erhält den Betrag $\mu_i$. Dabei wird der Nutzen $W(M)$ der großen Koalition $M$ aufgeteilt und die Mitglieder jeder Koalition $S$ erhalten zusammen mindestens den Nutzen $W(S)$ ausbezahlt.

Es besteht also für keine Koalition $S$ der Anreiz, aus der (großen) Koalition auszuscheren, da ihr dies lediglich den kleineren Gewinn $W(S)$ einbrächte.

**11.6. Beispiel.** Ein Parlament besteht aus 4 Parteien. Die Parteien 1, 2, 3 und 4 verfügen über 15%, 20%, 30%, bzw. 35% der Mandate.

Für eine Abstimmung (z.B. Verfassungsänderung) sei eine 3/4-Mehrheit erforderlich.

Ordnet man jeder Koalition $S$ den Nutzen 1 bzw. 0 zu, je nachdem, ob sie über die erforderliche Mehrheit verfügt oder nicht, d.h.

$$W(S) = \begin{cases} 1 & \text{falls } S \in \{\{1,2,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

so wird hierdurch ein kooperatives 4-Personenspiel definiert.

Das Core von $W$ ist die Lösungsmenge des folgenden Ungleichungssystems:

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 &= 1 \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 &\geqq 1 \\ \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 &\geqq 1 \\ \mu_1 \qquad + \mu_3 + \mu_4 &\geqq 1 \\ \sum_{i \in S} \mu_i &\geqq 0 \quad \text{für alle } S \text{ mit } W(S) = 0 \end{aligned}$$

Nun sieht man schnell, dass

$$C(W) = \big\{(0, 0, \mu_3, \mu_4) : \mu_3 \geqq 0, \mu_4 \geqq 0, \mu_3 + \mu_4 = 1\big\}$$

ist. ◊

**11.7. Bemerkung.** Es gibt Spiele mit leerem Core. Vergleiche Übung 47.

**11.8. Definition.** Ein Spiel $W \in \mathcal{S}_m$ heißt *balanciert,* wenn gilt

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j W(S_j) \leqq W(M) \quad \text{für alle } \alpha_j \geqq 0, S_j \subset M = \{1, \dots, m\} \text{ mit } \sum \alpha_j \chi_{S_j} = \chi_M$$

wobei $\chi_A(i) = 1$, falls $i \in A$, sonst 0. Die letzte Gleichung kann man auch schreiben als

$$\forall i \sum_{\{j\,:\,i \in S_j\}} \alpha_j = 1$$



## 11.9 Satz von Bondareva-Shapley

**11.9. Satz.** *Ein Spiel $W \in \mathcal{S}_m$ hat genau dann nichtleeres Core, wenn es balanciert ist.*

**Beweis.** „$\Rightarrow$“: Sei $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)^t \in C(W)$, und seien $\alpha_j, S_j$ im Sinne der obigen Definition gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} \alpha_j W(S_j) &\leqq \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \sum_{i \in S_j} \mu_i = \sum_j \alpha_j \sum_{i=1}^{m} \mu_i \chi_{S_j}(i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \mu_i \underbrace{\sum_j \alpha_j \chi_{S_j}(i)}_{=1} = \sum \mu_i = W(M) \end{aligned}$$

„$\Leftarrow$“: ($\circledast$) Sei $\mathcal{P}(M) = \{S_1, \dots, S_{2^m}\}$, und oBdA gelte $W(M) = 1$. Setze

$$\alpha_{ij} = \chi_{S_j}(i) - W(S_j) \qquad i \leqq m, j \leqq 2^m$$

Für die Matrix $A = (\alpha_{ij})$ gibt es nach dem Hauptsatz der Spieltheorie 2.3 ein $\bar{x} \in \mathbb{P}^m$ und ein $\bar{y} \in \mathbb{P}^{2^m}$ mit

$$x^t A \bar{y} \leqq \bar{x}^t A y \quad \text{für alle } x \in \mathbb{P}^m,\ y \in \mathbb{P}^{2^m} \tag{11.3}$$

Wir wollen einsehen, dass $A\bar{y}$ einen nichtnegativen Eintrag $i_0$ hat. Dann gilt wegen (11.3)

$$\bar{x}^t A y \geqq (e^{i_0})^t A \bar{y} = (A\bar{y})_{i_0} \geqq 0 \tag{11.4}$$

Es gilt

$$(A\bar{y})_i = \left(\sum_j \bar{y}_j \chi_{S_j}(i)\right) - \sum_j \bar{y}_j W(S_j)$$

Also müssen wir zeigen:

$$\sum_j \bar{y}_j W(S_j) \leqq \max_{i \leqq m} \left(\sum_j \bar{y}_j \chi_{S_j}(i)\right) =: \alpha > 0 \tag{11.5}$$

Zunächst ist klar, dass $\sum_j \bar{y}_j \chi_{S_j} \leqq \alpha \chi_M$ gilt.

Setze $z_j = 0$ falls $|S_j| \neq 1$, und $z_{j_0} = \alpha - \sum_{i_0 \in S_j} \bar{y}_j$ für $S_{j_0} = \{i_0\}$.

Nun gilt $\sum_j (\bar{y}_j + z_j)\chi_{S_j} = \alpha \chi_M$ und

$$\frac{1}{\alpha} \sum \bar{y}_j W(S_j) \leqq \sum \frac{\bar{y}_j + z_j}{\alpha} W(S_j)$$

woraus mit der Balanciertheit

$$\sum \frac{\bar{y}_j + z_j}{\alpha} W(S_j) \leqq W(M) = 1$$

folgt. Das zeigt (11.5).

Jetzt ergibt sich für $y = e^j$ in (11.4):

$$W(S_j) \leqq W(S_j) + (\bar{x}^t A)_j = W(S_j) + \sum_i \bar{x}_i \left(\chi_{S_j}(i) - W(S_j)\right) = \sum_{i \in S_j} \bar{x}_i$$

Wegen $\sum_i \bar{x}_i = 1 = W(M)$ ist $\bar{x} \in C(W)$. □

**11.10. Satz.** *Sei* $\mathcal{E} = (X^i, \succeq^i, a^i)_{i\in M}$ *(mit* $M = \{1,\dots,m\}$*) eine reine Tauschökonomie mit folgenden Eigenschaften:*

*i) Alle* $X^i$ *sind konvex, abgeschlossen, und nach unten beschränkt.*

*ii) Die Präferenzstrukturen seien Präferenzordnungen* $\succeq^i$*, gegeben durch nach oben halbstetige konkave Nutzenfunktionen* $u^i : X^i \to \mathbb{R}_+$*.*

*iii) Für jedes nichtleere* $S \subset M$ *sei*

$$A_S := \Big\{ x \in \prod_{i\in S} X^i : \sum_{i\in S} x^i \leqq a_S \Big\} \neq \emptyset$$

*Dann wird durch*

$$W_{\mathcal{E}}(\emptyset) = 0 \quad \textit{und} \quad W_{\mathcal{E}}(S) = \max\Big\{ \sum_{i\in S} u^i(x^i) : (x^i)_{i\in S} \in A_S \Big\}$$

*ein kooperatives Spiel* $W_{\mathcal{E}} \in \mathcal{S}_m$ *definiert, und* $C(W) \neq \emptyset$*.*

**Beweis.** 1. $X^i$ ist nach unten beschränkt, d.h. es gibt ein $b^i$ mit $b^i \leqq x^i$ für alle $x^i \in X^i$.

Wenn $(x^i)_{i\in S} \in A_S$ ist, so gilt

$$b_i \leqq x^i \leqq a_S - \sum_{\substack{j\neq i\\ j\in S}} x^j \leqq a_S - \sum_{\substack{j\neq i\\ j\in S}} b^j$$

Das heißt, die $A_S$ sind beschränkt. Da sie auch abgeschlossen sind (wie man sich schnell überlegt), sind sie kompakt.

Die $u^i$ sind ohs. Daher nimmt $\sum u^i$ auf $A_S$ ein Maximum an, und $W_{\mathcal{E}}$ ist wohldefiniert.

2. Aus $A_S \times A_T \subset A_{S\cup T}$ für disjunkte $S, T$ folgt $W_{\mathcal{E}} \in \mathcal{S}_m$.

3. Nach dem vorherigen Satz genügt es zu zeigen, dass $W = W_{\mathcal{E}}$ balanciert ist, d.h. es ist

$$\sum_{S\subset M} \mu_S W(S) \leqq W(M)$$

für $\sum_{S\subset M} \mu_S \chi_S = \chi_M$ und nichtnegative $\mu_S$ nachzuweisen.

Hierzu wählen wir für jedes nichtleere $S \subset M$ Elemente $x^{i,S} \in X^i$ (für $i \in S$) mit

$$W(S) = \sum_{i\in S} u^i(x^{i,S}) \quad \text{und} \quad \sum_{i\in S} x^{i,S} \leqq a_S$$

(beachte, dass dies nach Voraussetzung und Schritt 1 möglich ist).

Da wir $\sum_{S\subset M} \mu_S \chi_S(i) = 1$ annehmen, folgt

$$z^i := \sum_{S\subset M} \mu_S \chi_S(i) x^{i,S} \in \operatorname{conv}\,\big\{ x^{i,S} : S \subset M \big\} \subset X^i$$



Da $u^i$ konkav ist, erhalten wir

$$u^i(z^i) \geqq \sum_{S\subset M} \mu_S \chi_S(i) u^i(x^{i,S})$$

und somit

$$\begin{aligned}\sum_{S\subset M} \mu_S W(S) &= \sum_{S\subset M} \mu_S \sum_{i\in M} \chi_S(i) u^i(x^{i,S}) \\ &\leqq \sum_{i\in M} u^i(z^i) \leqq W(M)\end{aligned}$$

Für die letzte Ungleichung reicht es (nach Definition), nachzurechnen, dass $\sum z^i \leqq a_M$ ist. Das sehen wir wie folgt:

$$\sum_{i\in M} z^i = \sum_{S\subset M} \mu_S \underbrace{\sum_{i\in S} x^{i,S}}_{\leqq a_S = \sum_{i\in M} \chi_S(i) a^i} \leqq \sum_{i\in M} \underbrace{\sum_{S\subset M} \mu_S \chi_S(i)}_{=\chi_M(i)=1} a^i = \sum_{i\in M} a^i = a_M \qquad \square$$