1 Das lineare Input-Output-Modell von Leontieff

Es werden n Produktionsprozesse (Aktivitäten, etc.) betrachtet, in denen je ein Gut aus n Gütern erzeugt wird.

Makroökonomische Interpretation:

$$\text{Aktivitäten} \cong \text{Wirtschaftssektoren}$$

In jedem Sektor wird genau ein bestimmtes Gut (bzw. ein Güterbündel) erzeugt, das sich von allen anderen unterscheidet.

Modellannahme: Für jede Einheit eines Gutes j, dem Output des Sektors j, ist jeweils die Menge $a_{ij} \geqq 0$, des Gutes i als Input erforderlich.

Input sind Produktionsfaktoren und Ressourcen, Rohstoffe oder Zwischenprodukte, die als Output aus einem anderen Sektor stammen.

Es gibt keine Substitution zwischen den einzelnen Inputs.

Die Matrix $A = (a_{ij}) \geqq 0$ heißt *Input-Matrix* (oder *Technologie-Matrix*), die a_{ij} heißen *Input-Koeffizienten*. Dieses Modell wird auch *Leontieff-Modell* genannt (insbesondere dann, wenn es die gesamte Volkswirtschaft umfasst).

1.1 Das geschlossene Input-Output-Modell

In einem geschlossenen Modell werden alle Outputs zugleich als Inputs verwendet. Damit das System überhaupt arbeiten kann, muss der Output x_i des i-ten Gutes mindestens gleich dem Input $\sum_j a_{ij}x_j$ des Gutes i sein.

Für den Output x_j wird die Menge $a_{ij}x_j$ von Gut i benötigt, also wird die Menge $\sum_j a_{ij}x_j$ von Gut i für den Output x benötigt.

Das heißt: Für den Output x wird der Input Ax benötigt.

Es muss also ein $x \geq 0$ existieren mit $Ax \leqq x$ (*Funktionsfähigkeit*).

Solch ein x nennen wir *zulässig*.

Gilt für ein $x \geq 0$ sogar $Ax = x$, so nennen wir x einen *Gleichgewichtsoutput*.

Jedem Gut i kann ein Preis $p_i \geqq 0$ zugeordnet werden. Der Preis bestimme sich linear, d.h. die λ-fache Gütermenge hat den λ-fachen Preis. $p = (p_1, \ldots, p_n)^t$ sei der (semipositive) Preisvektor. Dann sind $p_i a_{ij}$ die Kosten des Inputs i für eine Einheit des Outputs j, d.h. $(p^t A)_j = \sum_i p_i a_{ij}$ sind die Gesamtkosten für eine Einheit des Outputs j, deren Wert p_j beträgt.

Genau dann stimmen in jedem Sektor der Erlös und die Kosten überein, wenn $p^t A = p^t$ gilt; dann heißt p *Gleichgewichtspreis*.

Gilt wenigstens $p^t A \geqq p^t$, so herrscht *Profitlosigkeit*. In diesem Fall heisst p *zulässig*.

Ist $e = (1, \ldots, 1)^t$ ein Gleichgewichtsoutput bzw. Gleichgewichtspreis, so heißt A *zeilenstochastisch* bzw. *spaltenstochstisch*. Ist A sowohl zeilen- als auch spaltenstochastisch, so heißt A *doppeltstochastisch*.

1.1. Satz. *Sei $A \geq 0$ eine $(n \times n)$-Matrix.*

a) (i) *Existiert ein zulässiger positiver Preisvektor p, so gilt:*

$$Ax \leqq x \quad \Rightarrow \quad Ax = x \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$$

d.h. jeder zulässige Output ist bereits ein Gleichgewichtsoutput.

(ii) *Existiert ein positiver Gleichgewichtspreis, so existiert auch ein (semipositiver) Gleichgewichtsoutput.*

b) (i) *Existiert ein zulässiger Output $x > 0$, so gilt:*

$$p^t A \geqq p^t \quad \Rightarrow \quad p^t A = p^t \qquad (\forall p \in \mathbb{R}^n)$$

d.h. jeder zulässige Preis ist bereits ein Gleichgewichtspreis.

(ii) *Existiert ein positiver Gleichgewichtsoutput, so existiert auch ein Gleichgewichtspreis.*

Beweis. a) (i): Für $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$ mit $Ax \leqq x$ sei $(Ax)_{i_0} < x_{i_0}$. Dann ergibt sich der folgende Widerspruch:

$$p^t x = \sum_i \underbrace{p_i}_{>0} \underbrace{x_i}_{\geqq (Ax)_i} > \sum_i p_i (Ax)_i = \underbrace{p^t A}_{\geqq p^t} x$$

(ii): Es sei p ein positiver Gleichgewichtspreis. Dann ist $Q := \{x \geqq 0 : p^t x = 1\}$ nicht leer, konvex und abgeschlossen. Wegen $1 = p^t x = \sum_i p_i x_i \geqq p_j x_j$ gilt $0 \leqq x_j \leqq \frac{1}{p_j}$; d.h. Q ist beschränkt, also kompakt. Für $T(x) := Ax$ gilt für $x \in Q$:

$$p^t T(x) = p^t A x = p^t x = 1.$$

Somit ist $T(Q) \subset Q$. Die Behauptung ergibt sich nun aus dem folgenden Spezialfall des Fixpunktsatzes von Markoff-Kakutani (bzw. von Brouwer 8.15).

b) analog zu a) □

1.2. Satz. *Ist $Q \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex, so hat jede lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $T(Q) \subset Q$ einen Fixpunkt in Q.*

Beweis. Übung 4. □

1.3. Bemerkung. Das obige Modell kann auch zur Beschreibung des Außenhandels zwischen n Ländern dienen:

1. Interpretation:
$a_{ij} \cong$ Anteil der von Land i produzierten Güter, die an Land j abgegeben werden.
Hier: $\sum_j a_{ij} = 1$, d.h. A ist zeilenstochastisch.

2. Interpretation:
$a_{ij} \cong$ Anteil des Einkommens von Land j, das für Güter aus Land i ausgegeben wird.
Hier: $\sum_i a_{ij} = 1$, d.h. A ist spaltenstochastisch.

1.2 Etwas „Perron-Frobenius-Theorie“

Eine $(n \times n)$-Matrix D heißt *nichtnegativ invertierbar*, wenn die Inverse D^{-1} existiert und nichtnegativ ist.

1.4. Lemma. *Für jede $(n \times n)$-Matrix $D = (d_{ij})$ mit $d_{ij} \leqq 0$ für alle $i \neq j$ sind folgende Bedingungen äquivalent.*

(i) Es gibt ein $x \geqq 0$ mit $Dx > 0$.

(ii) Aus $Dx \geqq 0$ folgt $x \geqq 0$.

(iii) Für jedes $y \geqq 0$ existiert ein $x \geqq 0$ mit $Dx = y$.

(iv) D ist nichtnegativ invertierbar.

(v) D ist invertierbar, und aus $x^t D > 0$ folgt $x > 0$.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Da $x \mapsto Dx$ stetig ist, gibt es auch ein $x > 0$ mit $Dx > 0$.
Es sei nun $Dy \geqq 0$ für ein $y \in \mathbb{R}^n$. Setze $\theta := \min_j \frac{y_j}{x_j}$ und wähle ein i_0 mit $\theta x_{i_0} = y_{i_0}$. Dann gilt:

$$0 \leqq (Dy)_{i_0} = \sum_{j \neq i_0} \underbrace{y_j}_{\geqq \theta x_j} \underbrace{d_{i_0 j}}_{\leqq 0} + \underbrace{y_{i_0}}_{= \theta x_{i_0}} d_{i_0 i_0} \leqq \theta \sum_{j \neq i_0} x_j d_{i_0 j} + \theta x_{i_0} d_{i_0 i_0} = \theta (Dx)_{i_0}$$

Also $\theta \geqq 0$, was insbesondere $y \geqq 0$ zur Folge hat.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Aus $Dx = 0$ folgt $D(\pm x) \geqq 0$, also $\pm x \geqq 0$, d.h. $x = 0$. Somt ist $\operatorname{rang}(D) = n$, und D^{-1} existiert. Für $y \geqq 0$ wähle man $x = D^{-1}y$. Dann gilt $Dx = y \geqq 0$, und nach (ii) $x \geqq 0$.
$(iii) \Rightarrow (iv)$: Zu e^i existiert ein $x^i \geqq 0$ mit $Dx^i = e^i$.
Also ist $D^{-1} = (x^1, \ldots, x^n) \geqq 0$.
$(iv) \Rightarrow (i)$: (⊛) Zu $e > 0$ wähle $x := D^{-1}e$. Da D nichtnegativ invertierbar ist, gilt $x > 0$.
$(iv) \Rightarrow (v)$: (⊛) Sei $x^t D > 0$. Es folgt $x^t = x^t D D^{-1} > 0 D^{-1} = 0$.
$(v) \Rightarrow (iv)$: (⊛) Setze $y^i = (D^{-1})^t e^i = (D^t)^{-1} e^i$. Es gilt

$$y^i_\varepsilon := (D^t)^{-1}(e^i + \varepsilon e) > 0$$

da $e^i + \varepsilon e$ für kleine positive ε positiv ist. Mit der Stetigkeit von $(D^t)^{-1}$ können wir $y^i \geqq 0$ schließen.
Wir haben gezeigt, dass D^t nichtnegativ invertierbar ist. Folglich gilt dies auch für D. □

Bemerkung: Matrizen D mit $d_{ij} \leqq 0$ für $i \neq j$, welche die äquivalenten Bedingungen aus Lemma 1.4 erfüllen, werden auch *M-Matrizen* genannt (M steht für Metzler, Minkowski, Markoff).
Notwendig, aber nicht hinreichend für die Bedingungen aus 1.4 ist $d_{ii} > 0$ für alle i:
Denn aus $d_{ii} \leqq 0$ würde folgen:

$$(De^i)_j = d_{ji} \leqq 0 \text{ für alle } j$$

Und nach (ii) müsste $e^i \leqq 0$ gelten.
Im folgenden sei A eine nichtnegative $(n \times n)$-Matrix. Wir setzen

$$M(A) := \{\rho \in \mathbb{R} : \rho I - A \text{ ist nichtnegativ invertierbar}\}$$

1.5. Lemma (⊛). *Es gilt $M(A) = (\lambda, \infty)$ für ein nichtnegatives λ.*

Beweis. 1) Wähle $\rho \in \mathbb{R}$ mit $\rho e > Ae$. Dann ist $De := (\rho I - A)e > 0$.
Mit 1.4 ist D nichtnegativ invertierbar, also ist $M(A) \neq \emptyset$.

2) Für $\rho \in M(A)$ gibt es (nach 1.4.i) ein $\tilde{x} \geqq 0$ mit $\rho\tilde{x} > A\tilde{x} \geqq 0$, daher ist ρ positiv. Die Menge $\{\rho' : \rho'\tilde{x} > A\tilde{x}\}$ ist offen, nach oben unbeschränkt und nach 1.4.i in $M(A)$ enthalten. Da ρ beliebig in $M(A)$ war, ist $M(A)$ offen, nach oben unbeschränkt und in $\mathbb{R}_+$ enthalten. Also ist $M(A) = (\lambda, \infty)$ für ein $\lambda \geqq 0$. □

Das eben ermittelte $\lambda = \lambda(A)$ heißt *Frobenius-Wurzel* von A.

1.6. Lemma (⊛). *Es gibt ein $x \in \mathbb{P}^n$ mit $Ax = \lambda(A)x$ $(= \lambda x)$.*

Beweis. Setze $y^k := ((\lambda + \frac{1}{k})I - A)^{-1}e \geq 0$, sowie $\sigma^k := \left\|y^k\right\|_1$ und $x^k := \frac{1}{\sigma^k} y^k \in \mathbb{P}^n$.
Da $\mathbb{P}^n$ kompakt ist, gibt es eine Teilfolge x^{k_l}, die gegen ein $x \in \mathbb{P}^n$ konvergiert. Es gilt

$$\left(\left(\lambda + \frac{1}{k_l}\right)I - A\right) x^{k_l} = \frac{e}{\sigma^{k_l}}$$

und

$$\left(\left(\lambda + \frac{1}{k_l}\right)I - A\right) x^{k_l} \to (\lambda I - A)x = \sigma e$$

mit $\frac{1}{\sigma^{k_l}} \to \sigma$, also insbesondere $\sigma \geqq 0$. Aus $\sigma > 0$ würde $\lambda \in M(A)$ folgen (nach 1.4.i), also gilt $\sigma = 0$ und x ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. □

1.7. Satz. *Ist A eine nichtnegative $(n \times n)$-Matrix, so gelten folgende Aussagen:*

(i) A hat einen nichtnegativen (reellen) Eigenwert. Der größte nichtnegative Eigenwert λ besitzt einen semipositiven Eigenvektor.

(ii) $(\rho I - A)$ ist nichtnegativ invertierbar genau dann wenn $\rho > \lambda$.

(iii) Aus $Ay \geqq \mu y$, $\mu \in \mathbb{R}$ und $y \geq 0$ folgt $\mu \leqq \lambda$.

(iv) Es gilt $\lambda \geqq |\omega|$ für jeden Eigenwert ω von A.

Beweis. $(i), (ii)$: $\lambda = \lambda(A)$ ist nichtnegativer Eigenwert mit einem semipositiven Eigenvektor x (nach den beiden vorhergegangenen Sätzen). Für $\rho > \lambda$ ist $\rho I - A$ (nichtnegativ) invertierbar, also ist ρ kein Eigenwert und λ ist der größte reelle Eigenwert. Nun folgt (ii) aus Lemma 1.5.
(iii): Nehmen wir an, dass $\mu > \lambda$ gelte. In diesem Falle wissen wir, dass $(\mu I - A)^{-1}$ existiert und nichtnegativ ist. Zusammen mit $0 \geqq (\mu I - A)y$ müsste gelten:

$$0 \geqq (\mu I - A)^{-1}(\mu I - A)y = y \geq 0$$

(iv): Sei z ein Eigenvektor zu dem Eigenwert ω. Dann ist $Az = \omega z$, d.h. $\sum_j a_{ij} z_j = \omega z_i$. Somit gilt

$$|\omega| \cdot |z_i| \leqq \sum_j a_{ij} |z_j| \quad \text{und somit} \quad A|z| \geqq |\omega| \cdot |z|$$

was mit (iii) zeigt, dass $|\omega| \leqq \lambda$ gilt. □

Definition: Eine $(n \times n)$-Matrix heißt *reduzibel*, wenn eine Teilmenge J von $\{1, \ldots, n\}$ existiert mit $\emptyset \neq J \neq \{1, \ldots, n\}$ derart, dass $a_{ij} = 0$ für alle (i, j) mit $i \notin J, \ j \in J$ gilt.
Andernfalls heißt A *irreduzibel.*

Interpretation: Ist die Inputmatrix $A \geq 0$ reduzibel bzgl. J, so benutzt kein Sektor $P_j, \ j \in J$ ein Gut $i \notin J$: bezüglich der benötigten Inputs ist die Teilmenge der Sektoren $\{P_j : j \in J\}$ autark.

1.8. Bemerkung. a) Ist A reduzibel bzgl. J, so gibt es eine Permutationsmatrix P mit

$$P^t A P = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline 0 & B_{22} \end{array}\right) & \begin{array}{l} \} \ |J| \\ \} \ n - |J| \end{array} \\ \begin{array}{cc} |J| & n - |J| \end{array} & \end{array}$$

b) A ist genau dann reduzibel, wenn A^t reduzibel ist (bzgl. $J(A^t) = (J(A))^C$).

c) Falls $A > 0$ gilt, so ist A irreduzibel.

1.9. Lemma. *Für $A \geq 0$ sind äquivalent:*

(i) A ist reduzibel.

(ii) Es gibt ein μ und ein $x \geq 0$ mit $x \not> 0$, so dass $Ax \leqq \mu x$ gilt.

Beweis. $(ii) \Rightarrow (i)$: Setze $J := \{j : x_j > 0\}$. Die Bedingungen für x stellen sicher, dass J die gewünschte Form hat. Aus $Ax \leqq \mu x$ schließen wir

$$\sum_j \underbrace{a_{ij}}_{\geqq 0} \underbrace{x_j}_{>0} \leqq \mu x_i = 0 \qquad \text{für } i \notin J$$

Somit gilt $a_{ij} = 0$ für $i \notin J, \ j \in J$ und A ist reduzibel.
$(i) \Rightarrow (ii)$: Es sei $P^t A P$ in der Blockform aus obiger Bemerkung. Nach 1.6 existiert ein semipositiver Eigenvektor y von B_{11} zu dem Eigenwert $\mu = \lambda(B_{11})$. Für $z = (y, 0)^t \in \mathbb{R}^n$ folgt

$$P^t A P z = (B_{11} y, 0)^t = \mu z$$

Nun leistet $x := Pz$ das gewünschte: $x \geq 0, \ x \not> 0$, und

$$Ax = APz = \mu P z = \mu x$$

□

Für irreduzible $A \geq 0$ lassen sich die Aussagen aus 1.7 wie folgt verschärfen:

1.10. Satz. *Die nichtnegative $(n \times n)$-Matrix A sei irreduzibel. Dann gelten folgende Aussagen:*

a) $\lambda = \lambda(A) > 0$.

b) Zu λ gibt es genau einen Eigenvektor in $\mathbb{P}^n$. Dieser ist positiv.

c) $(\rho I - A)^{-1} > 0$ für alle $\rho \in M(A)$.

d) ($\circledast$) Ist $(\rho I - A)x \geqq 0$ für ein $x \geq 0$, so ist $\rho \geqq \lambda$, und $\rho = \lambda$ gilt genau dann wenn x ein Eigenvektor von A ist. Insbesondere ist λ der einzige Eigenwert von A zu dem es einen semipositiven Eigenvektor gibt.

Beweis. a) Nach 1.6 existiert ein $x \in \mathbb{P}^n$ mit $Ax = \lambda x$. Mit 1.9 folgt $x > 0$.

Falls $\lambda = 0$ wäre, würde aus $x > 0$ und der Nichtnegativität von A folgen, dass $A = 0$ war, im Widerspruch zur Irreduzibilität.

b) Sei $y \in \mathbb{P}^n$ mit $Ay = \lambda y$ und x wie oben. Wir setzen $\theta := \min_j \frac{y_j}{x_j}$. Dann ist der Vektor $u := y - \theta x$ nichtnegativ, und mindestens einer seiner Einträge ist 0. Aus

$$Au = Ay - \theta A x = \lambda(y - \theta x) = \lambda u$$

und 1.9 folgt $u = 0$, d.h. $y = x$.

c) Sei $\rho \in M(A)$. Dann setzen wir

$$x^i := \underbrace{(\rho I - A)^{-1}}_{\geqq 0} \underbrace{e^i}_{\geqq 0} \geqq 0$$

Wegen

$$(\rho I - A) x^i = e^i \geq 0$$

folgt $x^i \geq 0$. Die letzte Formel zeigt außerdem, dass $Ax^i \leqq \rho x^i$ gilt. Mit 1.9 folgt $x^i > 0$. Da i beliebig war, ist $(\rho I - A)^{-1} > 0$.

d) Wir wissen, dass mit A auch A^t irreduzibel ist, und $\lambda(A) = \lambda(A^t)$ gilt (da $M(A) = M(A^t)$ wegen $(D^{-1})^t = (D^t)^{-1}$ gilt). Also existiert ein $y > 0$ mit $A^t y = \lambda(A^t) y$ bzw. $y^t A = \lambda(A) y^t$. Damit erhalten wir

$$\underbrace{y^t}_{>0} \underbrace{(\rho I - A)x}_{\geqq 0} = \rho y^t x - y^t A x = (\rho - \lambda) \underbrace{y^t x}_{>0}$$

und hieraus folgt die Behauptung. □

1.3 Zurück zum geschlossenen Input-Output Modell

Für Input-Output Modelle mit irreduzibler Inputmatrix A können wir nun einen einfachen Existenzsatz für Gleichgewichte beweisen:

1.11. Satz. *$A \geq 0$ sei irreduzibel.*

a) Folgende Bedingungen sind äquivalent:

(i) $\lambda(A) = 1$

(ii) Es gibt einen Gleichgewichtsoutput.

(iii) Es gibt einen Gleichgewichtspreis.

b) Gleichgewichtsoutput und Gleichgewichtspreis sind bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt und positiv (d.h.: Im Gleichgewicht sind alle Güter begehrt ($p > 0$) und alle Güter werden produziert ($x > 0$)).

Beweis. Das folgt aus 1.10, zusammen mit der Tatsache, dass $\lambda(A) = \lambda(A^t)$ ist. □

1.4 Das offene Input-Output Modell

Im Vergleich zum geschlossenen Input-Output Modell ist das offene von größerer praktischer Bedeutung. Hier werden bestimmte Wirtschaftsbereiche als exogen ausgesondert (Haushalte, Ex- und Importe, …). Es enthält dann nur die erzeugenden Sektoren (Industrie, Landwirtschaft, …), welche zusätzlich zum Systeminput auch Outputs produzieren, die nach außen abgegeben werden.

Die Input-Matrix sei nichtnegativ. Das System muss (um überlebensfähig zu sein) einen Überschuss $c \geq 0$ produzieren (Interpretation: $c \cong$ Konsumgüternachfrage).

Für die Produktion des Überschusses c ist ein Output $x \geq 0$ erforderlich mit $(I - A)x = c$.

1.12. Satz. *Für das offene Input-Output Modell sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(i) *Für alle* $c \geq 0$ *existiert ein* $x \geq 0$ *mit* $(I - A)x = c$.

(ii) *Für alle* $v \geq 0$ *existiert ein* $p \geq 0$ *mit* $p^t(I - A) = v^t$.

(iii) $D := I - A$ *erfüllt die Bedingungen aus 1.4 .*

(iv) $\lambda(A) < 1$

(v) *Das Modell ist „produktiv", d.h. es existiert ein* $x \geq 0$ *mit* $Ax < x$.

1.13. Bemerkung. Speziell besagt „$(v) \Rightarrow (i)$", dass in produktiven Modellen jeder Überschuss produziert werden kann. Erfüllt x die Bedingung (i), und p die Bedingung (ii), so folgt

$$p^t c = v^t x,\ p^t(A - I)_j = v_j = \text{ Nettogewinn bei Produktion einer Einheit des Gutes } j$$

Somit gilt

$$v^t x = \sum_j v_j x_j = \text{ Nettogewinn bei Output } x$$

Man kann sagen: „Sozialprodukt = Volkseinkommen".

Beweis von 1.12. $(i) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (v)$: Das folgt aus 1.4.
$(ii) \Leftrightarrow (iii)$: folgt analog wegen $(D^t)^{-1} = (D^{-1})^t$.
$(iii) \Leftrightarrow (iv)$: Das ist 1.7.ii. □

Literatur zu diesem Kapitel: [**Ka 1**], [**Ka 2**], [**Ni 1**], [**Ni 2**], [**KN**].